

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ УКРАИНЫ
“КИЕВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ”

На правах рукописи

Апостолюк Владислав Александрович

**ДИНАМИКА И ПОГРЕШНОСТИ
МИКРОМЕХАНИЧЕСКИХ ГИРОСКОПОВ**

Специальность 05.11.03 - “Гироскопы и навигационные системы”

Диссертация на соискание ученой степени

кандидата технических наук

Научный руководитель

Збруцкий Александр Васильевич

доктор технических наук,

профессор

КИЕВ - 1999

СОДЕРЖАНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ	5
1.1. Обзор публикаций по исследованиям и разработкам микромеханических гироскопов	7
1.2. Классификация основных видов микромеханических гироскопов	12
1.3. Постановка задачи и основные результаты работы, выносимые на защиту	14
2. АНАЛИЗ ДИНАМИКИ ОСНОВНЫХ ВИДОВ МИКРОМЕХАНИЧЕСКИХ ГИРОСКОПОВ	22
2.1. Камертонная схема микромеханического гироскопа	22
2.1.1. Кинематическая схема и уравнения движения чувствительного элемента	22
2.1.2. Анализ движения чувствительного элемента на вращающемся основании	28
2.1.3. Основные погрешности камертонного гироскопа	35
2.1.4. Выводы	42
2.2. Кардановая схема микромеханического гироскопа	43
2.2.1. Кинематическая схема и уравнения движения чувствительного элемента	43
2.2.2. Анализ движения чувствительного элемента на вращающемся основании	49
2.2.3. Основные погрешности карданового гироскопа	55
2.2.4. Выводы	69
2.3. Выводы по главе	70
3. АНАЛИЗ ДИНАМИКИ ВИБРАЦИОННОГО ГИРОСКОПА С ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ РАМКОЙ	72
3.1. Базовая математическая модель	72

3.1.1. Кинематическая схема и уравнения движения чувствительного элемента	72
3.1.2. Движение чувствительного элемента на неподвижном основании	76
3.1.3. Движение чувствительного элемента на вращающемся основании	77
3.1.4. Устойчивость колебаний чувствительного элемента	81
3.1.5. Собственные частоты чувствительного элемента гироскопа	84
3.1.6. Амплитудно- и фазочастотные характеристики	87
3.2. Схемы построения измерителя угловой скорости на вибрационном гироскопе с дополнительной рамкой	91
3.2.1. Схема прямого измерения угловой скорости	91
3.2.2. Схема измерения угловой скорости с обратной связью	97
3.3. Выводы	105
4. ПОГРЕШНОСТИ ВИБРАЦИОННОГО ГИРОСКОПА С ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ РАМКОЙ	106
4.1. Влияние поступательного ускорения на динамику чувствительного элемента	106
4.2. Погрешность от поступательной вибрации основания	107
4.3. Динамическая погрешность измерения гармонической угловой скорости	110
4.4. Погрешность от несовпадения измерительных и упругих осей	113
4.5. Перекрестная чувствительность гироскопа	117
4.6. Погрешность от дебаланса инерционной массы	120
4.7. Влияние изменений температуры на динамику	122

чувствительного элемента	
4.8. Выводы	127
5. ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОДНОМАССОВЫХ МИКРОМЕХАНИЧЕСКИХ ГИРОСКОПОВ	128
5.1. Функциональные схемы микромеханических вибрационных гироскопов	128
5.2. Расчет гребенчатого двигателя	133
5.3. Расчет характеристик микромеханических гироскопов	136
5.3.1. Нестабильность масштабного коэффициента	136
5.3.2. Смещение нуля у одномассовых гироскопов	138
5.3.3. Ширина полосы пропускания	139
5.3.4. Разрешающая способность	140
5.4. Сравнительный анализ характеристик гироскопов с поступательными и вращательными движениями чувствительных элементов	141
5.5. Выводы	145
6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ	146
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	149
ПРИЛОЖЕНИЯ	157
Приложение А. Численное моделирование на языке MATLAB	157
Приложение Б. Смещение парциальных частот	162
Приложение В. Расчет параметров конструкции чувствительного элемента	165
Приложение Д. Акт об использовании (внедрении) результатов диссертационной работы	168

1. ВВЕДЕНИЕ

В системах навигации, стабилизации и наведения всех движущихся объектов основными датчиками первичной информации об угловых, а иногда и о линейных перемещениях объекта являются различные гироскопы и гироскопические приборы. Современный уровень технических достижений в области гироскопического приборостроения и инерциальной навигации обусловлен развитием и широким применением прикладной теории гироскопов, которая связана с именами А.Н.Крылова, А.Ю.Ишлинского, В.И.Кузнецова, Д.М.Климова, Д.С.Пельпора, Б.В.Булгакова, С.С.Тихменева, А.А.Лапина, Б.И.Назарова, В.Н.Кошлякова, Н.В.Бутенина, О.Ф.Бойчука, И.А.Михалева, А.К.Неусыпина, Б.И.Кудревича, М.А.Павловского, А.В.Збруцкого, А.С.Довгополого, Е.Л.Смирнова, Н.Н.Острякова, В.П.Демиденко, А.А.Одинцова, Б.Б.Самотокина, А.В.Репникова, Л.А.Северова, Я.Н.Ройтенберга, В.Ф.Журавлева, С.А.Черникова, В.А.Павлова, Л.И.Каргу, Е.А.Девянина, С.С.Ривкина, И.Б.Челпанова, Е.Р.Рахтеенко, М.В.Чичинадзе, Г.Д.Блюмина, Ю.К.Жбанова [1-31], а также зарубежных ученых Ч.Дрейпера, К.Магнуса, М.Шулера [32-34] и др.

Расширение традиционных областей применения гироскопов и появление новых обусловило появление потребности в недорогих, миниатюрных датчиках угловой скорости невысокой точности. Современное развитие микроэлектронных технологий позволило использовать их для создания миниатюрных вибрационных гироскопов, получивших название микромеханических. Микромеханические датчики первичной информации позволяют создавать малогабаритные инерциальные навигационные системы, интегрированные со спутниковыми навигационными системами и обеспечивающими необходимую точность определения положения и ориентации различных

подвижных объектов: аэрокосмических летательных аппаратов, морских судов, наземных транспортных средств, робототехнических комплексов. К нетрадиционным применениям микромеханических гироскопов можно отнести системы виртуальной реальности (датчики первичной информации о параметрах движения оператора, которые используются для управления вычислительным процессом), интеллектуальные игрушки, самонаводящиеся снаряды и пули. Актуальность и перспективность разработки недорогих и миниатюрных гироскопов привела к тому, что большинство ведущих приборостроительных компаний мира занялись созданием микромеханических гироскопов и акселерометров.

Чувствительные элементы микромеханических гироскопов представляют собой плоские миниатюрные конструкции с габаритными размерами от 10 до 1000 мкм, некоторые элементы которых могут совершать колебания в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Таким образом, большинство современных микромеханических гироскопов относятся к осцилляторным вибрационным гироскопам с сосредоточенными параметрами. Вибрационные гироскопы обладают рядом преимуществ по сравнению с традиционными электромеханическими датчиками. К таким преимуществам можно отнести простоту конструкции чувствительного элемента и отсутствие трущихся подвижных деталей, так как колебания элементов совершаются за счет упругих деформаций торсионов или балок. Использование микроэлектронных технологий массового изготовления позволяет выпускать такие приборы в большом количестве, что значительно снижает их себестоимость.

Патенты на различные технические решения в области разработок микромеханических чувствительных элементов получены такими фирмами, как Draper Laboratory Inc., Rockwell International, Systron Donner, Analog Devices, SAGEM, Murata и др.

1.1. Обзор публикаций по исследованиям и разработкам микромеханических гироскопов

Рассмотрим основные опубликованные на настоящий момент результаты по исследованиям и разработкам микромеханических гироскопов и конструкциям их чувствительных элементов.

Одной из наиболее ранних конструкций микромеханических гироскопов является карданный микромеханический гироскоп, разработанный специалистами фирмы The Charles Stark Draper Laboratory [35, 36]. Эта конструкция состоит из внешней и внутренней карданных рамок, соединенных посредством упругих торсионов. Входными являются угловые колебания наружной рамки, а выходными - угловые колебания внутренней кардановой рамки.

Габариты чувствительного элемента карданового микромеханического гироскопа по наружной рамке составляют приблизительно $15 \times 15 \times 1$ мкм. Чувствительный элемент изготавливается из пластинки кварца или кремния толщиной 1 мкм травлением с использованием фотолитографии. К 1994 году точность карданового микромеханического гироскопа достигала приблизительно 300 °/час. Результаты разработки датчика угловой скорости на кардановом чувствительном элементе освещались в докладах [37-39], где вопросы динамики чувствительных элементов не затрагивались. Базовые вопросы динамики карданового микромеханического гироскопа и создания математической модели движения его чувствительного элемента рассматривались в работах [40, 41], где были получены линеаризованные уравнения движения чувствительного элемента, проанализированы собственные частоты и влияние соотношений инерционных параметров на его частотные характеристики. В докладе [42] рассматривались принцип действия и основные погрешности вибрационного карданового гироскопа. Вопросы,

связанные с исследованием перекрестной чувствительности, температурными погрешностями и анализом нелинейных уравнений движения чувствительного элемента, не затрагивались.

Другой разработкой фирмы The Charles Stark Draper Laboratory в области создания микромеханических гироскопов стал прибор, который получил название камертонного микромеханического гироскопа [43-46]. Чувствительный элемент камертонного гироскопа состоит из двух инерционных масс, размещенных в рамке упругого подвеса. Принцип действия прибора основан на измерении амплитуд угловых колебаний рамки или поступательных колебаний инерционных масс, которые вызываются силами инерции Кориолиса [44]. Современные камертонные микромеханические гироскопы показывают стабильность систематического дрейфа на уровне $0,5 \text{ }^\circ/\text{с}$ в диапазоне температур $-40\dots+85^\circ\text{C}$ без температурной стабилизации и на уровне $1 \text{ }^\circ/\text{час}$ со стабилизацией температуры [45]. В указанных работах описывался принцип действия гироскопа, особенности технологии его изготовления, желаемые и достигнутые характеристики. Вопросы исследования динамики камертонного чувствительного элемента, построения математической модели движения на вращающемся основании и погрешностей гироскопа в этих работах не рассматривались. Уравнения движения традиционных камертонных гироскопов и принцип действия приводились в монографиях [20] и [26]. Динамика пьезоэлектрических штыревых гироскопов исследовалась в работе [47], а вопросы технологии изготовления микромеханических гироскопов освещались в докладах [48, 49].

Камертонная схема привлекает возможностью применения дифференциальной схемы измерения угловой скоростью. Однако, последующие конструкции камертонных гироскопов не используют упругую связь между инерционными массами, и не используют их

совместного вращения вместе с рамкой [50]. Хотя гироскоп называется камертонным, две инерционные массы, выполненные в одном корпусе, совершают поступательные перемещения в двух независимых направлениях.

Рассмотренные конструкции микромеханических гироскопов характерны тем, что информация об измеряемой переносной угловой скорости заключена в амплитуде угловых колебаний чувствительного элемента. Снижение разрешающей способности гироскопа при уменьшении линейных размеров чувствительных элементов, в свою очередь, снижает степень дальнейшей миниатюризации прибора.

Позднее стали публиковаться сообщения о микромеханических гироскопах, в которых чувствительный элемент совершает поступательные колебания. В работе [51] проводится сравнительная характеристика конструкций двух микромеханических гироскопов: с угловыми первичными (возбуждаемыми) и вторичными (выходными) колебаниями, и с поступательными первичными и вторичными колебаниями чувствительного элемента. Показано, что потенциальная разрешающая возможность гироскопа с поступательными колебаниями значительно выше. Приведены уравнения движения чувствительных элементов обоих приборов. Рассмотрены, но аналитически не обоснованы принципы построения компенсационных вибрационных гироскопов, и принципы управления собственной частотой для поддержания резонанса. Для гироскопа с угловыми колебаниями чувствительного элемента рассмотрена погрешность, которая названа левитацией, и обусловлена работой системы возбуждения.

В работе [54] также рассмотрены конструкции двух микромеханических гироскопов. Чувствительный элемент первой представляет собой инерционную массу, закрепленную в упругом подвесе, который позволяет ей совершать поступательные колебания в двух

взаимно-перпендикулярных направлениях. При этом система возбуждения действует непосредственно на инерционную массу. Приведены уравнения движения чувствительного элемента. Отмечены трудности разделения первичных и вторичных колебаний по упругим связям из-за погрешностей изготовления. В качестве альтернативной была приведена конструкция чувствительного элемента, в котором инерционная масса закреплена в рамке. В этом случае возбуждающая сила прикладывается к рамке, и возбуждает первичные колебания рамки вместе с инерционной массой. Вторичные колебания инерционная масса совершает уже относительно рамки. Эта конструкция эквивалентна конструкции гироскопа с поступательным перемещением инерционной массы, который был описан в статье [51], и который в последующем изложении будет упоминаться, как одномассовый гироскоп с дополнительной рамкой.

В указанных работах по одномассовым гироскопам исследование их динамики и погрешностей не проводилось, математическая модель не составлялась. Исследование уравнений движения чувствительного элемента одномассовых гироскопов (без рамки) проводилось в [26]. Некоторые аспекты применения метода усреднения в матричной форме для анализа динамики одномассовых гироскопов и численного моделирования изложено в работе [57].

Еще одним примером одномассового микромеханического гироскопа может стать конструкция, описанная в [58]. Здесь приведено описание конструкции прибора, принципа работы магнитной системы регистрации выходных колебаний инерционной массы, формулы для расчета силы, создаваемой системой возбуждения, и расчета коэффициента чувствительности гироскопа. Особенности динамики и погрешности не анализировались.

С определенным отставанием разработки микромеханических гироскопов осуществляются и в России. В докладе НПК "Вектор" [59]

рассматривается микромеханический вибрационный гироскоп с кардановым подвесом инерционной массы, который сформирован из двух пар торсионов с взаимно ортогональными осями. Влияние термоупругих напряжений на точностные характеристики оценено для гироскопа, работающего в режиме измерителя проекции угловой скорости основания на его входную ось. Показано, что наиболее серьезным является влияние термоупругих напряжений в месте крепления гироскопа к основанию, приводятся техническое решение, позволяющее минимизировать его влияние на конструкцию вибрационного гироскопа. Показаны результаты расчетов для двух значений толщины платы 300 и 500 мкм. Наличие груза приводит к деформации поверхности микромеханической платы при нагреве. При разности температурных коэффициентов линейного расширения платы и груза $2 \cdot 10^6$ 1/С и нагреве до температуры 100 °С деформация платы составляет примерно 8 нм. Численные результаты показали также, что искривление гироскопа вследствие биметаллического эффекта является наиболее существенным. Разность температурных коэффициентов линейного расширения в $1 \cdot 10^6$ 1/С и повышение температуры на 100 С приводят к прогибу микромеханической платы примерно на 30 нм. Чтобы подавить этот эффект, предлагается применить специальную плату с вытравленными на ней упругими развязывающими элементами. Она позволяет снизить вышеупомянутый прогиб платы до 1,5 нм.

В другом докладе НПК «Вектор» [60] рассматривается влияние активного сопротивления электрических цепей в схемах управления колебаниями микромеханических вибрационных гироскопов и акселерометров на демпфирование механического колебательного контура. Составлена схема динамической системы, показывающая перекрестные связи электрических цепей и механического осциллятора, к на основе ее анализа предложены меры по предотвращению снижения добротности

гироскопа или оптимизации демпфирования механической части акселерометра. В результате показана возможность и целесообразность регулировки демпфирования механической части акселерометра посредством выбора активных сопротивлений в цепи конденсаторов.

1.2. Классификация основных видов микромеханических гироскопов

Основы классификации вибрационных гироскопов изложены в работе [26], где отмечалось, что все известные на настоящий момент типы вибрационных гироскопов можно разбить на два класса: роторные вибрационные гироскопы и осцилляторные вибрационные гироскопы. В основу такого разделения положен признак, определяемый характером первичного движения чувствительного элемента (ЧЭ). Осцилляторные вибрационные гироскопы можно подразделить на два вида: гироскопы с сосредоточенными и с распределенными параметрами.

Покажем в этой классификации место существующих микромеханических гироскопов по отношению к остальным вибрационным гироскопам. В рассмотренной базовой классификации существующие микромеханические гироскопы относятся к осцилляторным вибрационным гироскопам с сосредоточенными параметрами. По количеству инерционных масс в составе чувствительного элемента, которые совершают вторичные колебания, гироскопы могут быть двухмассовыми (камертонный гироскоп) и одномассовыми (кардановый, дисковый, одномассовый с дополнительной рамкой и без нее). В свою очередь одномассовые гироскопы отличаются по характеру движения чувствительного элемента: вращательное и поступательное. На основании перечисленных признаков расширенная классификация вибрационных

гироскопов может быть представлена схематически, как показано на рис.

1.1.



Рис. 1.1. Классификация вибрационных гироскопов

Динамика роторных вибрационных гироскопов в настоящее время достаточно хорошо изучена [20, 21, 23-25]. К осцилляторным вибрационным гироскопам с распределенными параметрами относятся различные волновые гироскопы, среди которых широкое распространение

получили твердотельные волновые гироскопы. Кроме этого ведутся исследования по гироскопам на поверхностных и объемных акустических волнах. На основании рассмотренных выше опубликованных материалов видно, что среди осцилляторных гироскопов с сосредоточенными параметрами математическая модель на уровне принципа работы составлялась только для камертонных гироскопов.

Как следует из приведенной на рис. 1.1 классификации, все современные микромеханические гироскопы, за исключением камертонного, относятся к одномассовым осцилляторным вибрационным гироскопам с сосредоточенными параметрами. Это объясняется тем, что относительная простота конструкции одномассовых гироскопов предопределяет большие перспективы с точки зрения миниатюризации. В особенности это касается гироскопов с поступательными колебаниями чувствительного элемента. Рассмотренные конструкции одномассовых микромеханических гироскопов характерны тем, что они планарные. Это их свойство определяется технологией изготовления чувствительных элементов. Математическая модель одномассовых осцилляторных вибрационных гироскопов с сосредоточенными параметрами на уровне динамики и погрешностей ранее в публикациях не рассматривалась.

1.3. Постановка задачи и основные результаты работы, выносимые на защиту

Актуальность темы. Анализ публикаций по микромеханическим гироскопам показал, что детальное рассмотрение динамики и погрешностей таких датчиков в них отсутствует. В частности, не освещены погрешности, вызванные пространственным движением основания, изменениями температуры, неидеальностью технологии изготовления и

сборки. Отсутствуют методики расчета основных характеристик микромеханических гироскопов: ширины полосы пропускания, масштабного коэффициента и его стабильности, смещения нуля и разрешающей способности. Поэтому актуальным является создание математической модели осцилляторных (одномассовых) вибрационных гироскопов с сосредоточенными параметрами, как наиболее перспективных, и проведение сравнительного анализа различных конструкций с точки зрения реализации ее в Украине (потребность которой в микромеханических гироскопах в недалеком будущем может исчисляться несколькими тысячами штук в месяц).

Связь работы с научными программами, планами, темами.

Исследования динамики и погрешностей микромеханических гироскопов выполнялись в соответствии с научными планами Государственного комитета по науке и технике и проектом Министерства образования Украины (тема №2330).

Цель и задачи исследования:

1. Исследовать динамику микромеханических гироскопов различных кинематических схем, выявить зависимости, определяющие влияние вращения основания на параметры движения чувствительных элементов, с целью выработки рекомендаций по расчету, проектированию и улучшению характеристик гироскопов как датчиков угловой скорости.

2. Разработать математическую модель погрешностей микромеханических гироскопов различных схем в условиях пространственных движений основания, неидеальности изготовления и изменений температуры для выработки рекомендаций по выбору конструктивных параметров и уменьшению или исключению влияния вредных факторов.

3. Создать вычислительные программы аналитического и численного моделирования движения чувствительных элементов микромеханических

гироскопов на подвижном основании, и программы автоматизированного проектирования конструкций чувствительных элементов.

Для достижения поставленных целей в работе решены следующие группы задач:

1. Разработана и обоснована математическая модель чувствительных элементов гироскопов различных схем, при помощи которой проведены исследования влияния вращения основания на основные параметры движения их чувствительных элементов. Исследованы переходные процессы для схем прямого измерения и с обратной связью.

2. Исследовано влияние поступательных ускорений и вибраций, гармонического характера измеряемой угловой скорости, перекрестной чувствительности, таких технологических факторов, как несовпадение измерительных и упругих осей, дебаланс, а также изменений температуры на точность измерения угловой скорости, выявлены наиболее вредные факторы и выработаны методы уменьшения обусловленных ими погрешностей.

3. Получены зависимости для расчета основных характеристик микромеханических гироскопов и проведен их сравнительный анализ для гироскопов с поступательными и вращательными движениями чувствительного элемента.

4. Созданы компьютерные программы аналитического и численного моделирования динамики и погрешностей чувствительных элементов.

Научная новизна полученных результатов. В результате проведенных исследований были получены следующие новые результаты, впервые полученные соискателем, которые выносятся на защиту:

В научном плане

1. Разработаны и обоснованы математические модели для одномассовых гироскопов с сосредоточенными параметрами с поступательными и вращательными движениями чувствительных

элементов, которые позволили исследовать механизм влияния вращения основания на основные параметры движения их чувствительных элементов. Составлены структурные схемы, получены передаточные функции и частотные характеристики чувствительного элемента гироскопа прямого измерения и с обратной связью. Проведен анализ переходных процессов, который позволил обосновать улучшение качества измерения угловой скорости путем введения компенсационных обратных связей.

2. Разработана математическая модель погрешностей одномассовых микромеханических гироскопов с поступательным и вращательным движением чувствительного элемента, обусловленных влиянием ускорений и вибраций, перекрестной чувствительности, изменений температуры, дебаланса и несовпадения упругих и измерительных осей. Определено, что наиболее существенными из них являются изменения температуры, поступательные вибрации на рабочей частоте, несовпадение упругих и измерительных осей. Установлено, что возбуждение чувствительного элемента на собственной частоте первичных (возбуждаемых) колебаний обеспечивает минимум погрешности от поступательной вибрации и максимальную чувствительность прибора, выбором отношения парциальных частот первичных и вторичных (вызванных вращением основания) колебаний определяется ширина полосы пропускания по угловой скорости, а предложенным в работе выбором рабочей точки для системы температурной стабилизации можно значительно снизить требования к ней. Из анализа влияния поступательных ускорений и вибраций следует необходимость фильтрации регистрируемого гармонического сигнала, соответствующего вторичным колебаниям чувствительного элемента, на рабочей частоте прибора. Созданием равножесткого подвеса устраняется погрешность от несовпадения упругих и измерительных осей. Анализ математической модели, описывающей динамику и основные погрешности камертонного гироскопа, позволил

установить, что влияние системы возбуждения на точность измерения угловой скорости не существенно, а возбуждение прибора на собственной частоте первичных колебаний приводит к уменьшению погрешности от влияния поступательных вибраций основания на несимметричный чувствительный элемент.

В прикладном плане

1. На основе разработанной математической модели одномассовых микромеханических гироскопов и анализа их погрешностей получены зависимости для расчета и оптимизации основных характеристик прибора: ширины полосы пропускания, масштабного коэффициента и его стабильности, смещения нуля, разрешающей способности. Предъявлены требования к угловой точности монтажа чувствительного элемента исходя из требуемой максимальной величины смещения нуля. Проведен сравнительный анализ характеристик гироскопов с поступательным и вращательным движениями чувствительного элемента.

2. Исходя из составленной математической модели гребенчатого двигателя системы возбуждения получены зависимости для расчета проектируемой глубины установки гребенчатых структур, которая обеспечивает максимальную эффективность работы двигателя.

3. Разработаны программы аналитического расчета составляющих математической модели и автоматического расчета характеристик и параметров одномассового чувствительного элемента с дополнительной рамкой на языке Mathematica 3.0, программы численного моделирования движения чувствительного элемента одномассовых вибрационных гироскопов с сосредоточенными параметрами прямого измерения и со скоростной обратной связью на основе полных уравнений движения на языке Matlab 5.0.

Практическое значение полученных результатов. Научные и практические результаты диссертационной работы использовались:

1. Киевским научно-исследовательским институтом “Орион” при создании чувствительного элемента экспериментального микромеханического гироскопа в виде математической модели, расчетных соотношений для основных погрешностей гироскопа, рекомендаций по выбору параметров инерционной массы чувствительного элемента. Отмечено, что проведенные автором исследования позволяют повысить точность и улучшить измерительные характеристики микромеханических гироскопов (см. приложение Д).

2. Министерством образования Украины в рамках проекта “Разработка структуры и исследование навигационного блока аппаратуры обеспечения безопасности судоходства в акватории портов” (тема №2330) в виде математической модели датчика угловой скорости на основе микромеханического гироскопа, расчетных соотношений для основных погрешностей и характеристик датчика угловой скорости, и программы автоматического проектирования чувствительного элемента гироскопа для заданных желаемых характеристик.

3. Кафедрой “Приборы и системы управления летательными аппаратами” НТУУ “КПИ” при чтении курса лекций “Чувствительные элементы гироскопических систем”, подготовке к изданию методических указаний к изучению раздела “Микромеханические гироскопы”.

Полученные результаты и предложенные в работе рекомендации могут использоваться для разработки и проектирования не только микромеханических гироскопов, но и вообще одномассовых вибрационных гироскопов с сосредоточенными параметрами.

Степень обоснованности научных исследований, выводов и рекомендаций. Научные и практические положения, выводы и рекомендации сформулированы на основе сравнения результатов аналитического и численного моделирования динамики микромеханических гироскопов на вращающемся основании с

экспериментальными данными. При испытаниях экспериментального образца карданового микромеханического гироскопа в Киевском научно-исследовательском институте “Орион” были получены результаты, которые подтверждают правильность расчетных соотношений.

Апробация результатов диссертационной работы. Научные и практические результаты диссертационной работы докладывались, обсуждались и получили позитивную оценку на следующих конференциях: международная научно-техническая конференция “Современные научно-технические проблемы гражданской авиации”(Москва, 1996, [61]); 1-ая национальная научно-техническая конференция “Гіротехнології, навігація та управління рухом” (Киев, 1996, [63]); IV Санкт-Петербургская международная научно-техническая конференция по интегрированным навигационным системам (Санкт-Петербург, 1997, [62]); 2-ая международная научно-техническая конференция “Гіротехнології, навігація та управління рухом” (Киев, 1997, [64]); международная научно-техническая конференция “Приборостроение-98” (Евпатория, 1998, [65]); юбилейная научно-техническая конференция “Приборы и системы ориентации, стабилизации и навигации” (Москва, 1998, [66]).

Публикации. Основные результаты работы опубликованы в 4-х статьях и 5-ти материалах и тезисах докладов.

Диссертационная работа состоит из 5 глав, заключения и приложений.

Глава 1 посвящена обзору литературы, постановке задачи и изложению основных результатов, выносимых на защиту.

Глава 2 содержит составление уравнений движения чувствительных элементов, анализ движения на вращающемся основании и исследования основных погрешностей камертонного и карданового вибрационных гироскопов.

Глава 3 содержит обобщенную математическую модель осцилляторных (одномассовых) вибрационных гироскопов с

сосредоточенными параметрами в рамках которой рассмотрены базовая математическая модель, анализ динамики и переходных процессов одномассовых гироскопов прямого измерения и с обратной связью в информативных амплитудно-фазовых переменных.

Глава 4 содержит исследование основных погрешностей микромеханического вибрационного гироскопа и методов их уменьшения.

Глава 5 посвящена прикладным аспектам проектирования микромеханических гироскопов и расчета их элементов, и содержит функциональные схемы одномассовых гироскопов, расчет гребенчатого двигателя, методику расчета основных характеристик микромеханического гироскопа.

В **заключении** сформулированы основные результаты работы.

В **приложениях** изложены методики и результаты численного и аналитического моделирования микромеханических гироскопов, а также некоторые аспекты исследования погрешностей микромеханических гироскопов, не вошедшие в основную часть работы.

2. АНАЛИЗ ДИНАМИКИ ОСНОВНЫХ ВИДОВ МИКРОМЕХАНИЧЕСКИХ ГИРОСКОПОВ

Рассмотрим принципы действия, особенности динамики и основные погрешности осцилляторных микромеханических вибрационных гироскопов с сосредоточенными параметрами различных конструктивных схем, которые являются наиболее распространенными в настоящее время.

2.1. Камертонная схема микромеханического гироскопа

В настоящее время при разработке микромеханических датчиков угловых скоростей используют как классическую камертонную схему, так и возможные ее модификации. Примером этого может служить микромеханический камертонный гироскоп TFG (Tuning Fork Gyro), разработанный в Draper Laboratory Inc. Как и все микромеханические датчики, камертонный гироскоп изготавливается из кремния с использованием технологий полупроводниковой микроэлектроники. Необходимой составляющей разработки гироскопа является исследование его динамики.

2.1.1. Кинематическая схема и уравнения движения чувствительного элемента

В общем случае конструкция чувствительного элемента камертонного гироскопа представляет собой две инерционные массы, размещенные в упругом подвесе, обеспечивающем каждой из них по меньшей мере две степени свободы. При помощи внешних датчиков силы возбуждаются гармонические колебания инерционных масс в противофазе. При возбуждении колебаний по одной из координат в присутствии переносной угловой скорости возникают колебания в направлении другой координаты.

Рассмотрим плоскую конструкцию, состоящую из двух симметрично расположенных инерционных масс (1 и 2 на рис. 2.1), прикрепленных к основанию при помощи упругого подвеса. В состав упругого подвеса входят упругие элементы и жесткая рамка (3). Инерционные массы крепятся к рамке посредством упругих элементов, которые обеспечивают им поступательные перемещения по отношению к рамке в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Упругие элементы, которыми рамка крепится к основанию, позволяют ей, в общем случае, совершать поступательные и вращательные перемещения. Введем подвижную систему координат $OXYZ$ так, что вся конструкция расположена в плоскости YZ , а ось Z - перпендикулярна ей (рис. 2.1).

Каждая из масс может перемещаться в направлении осей X и Y независимо одна от другой, а также вместе с рамкой они могут поворачиваться вокруг оси Z на угол α . Будем считать, что вектор измеряемой переносной угловой скорости $\vec{\Omega}$ направлен вдоль оси Z . В этом случае, возбуждая колебания масс в направлении оси Y , в присутствии переносной угловой скорости возникнут колебания в направлении оси X и угловые колебания вокруг оси Z .

Уравнения движения чувствительного элемента. Составим дифференциальные уравнения движения чувствительного элемента камертонного гироскопа. Введем следующие обобщенные координаты: x_i и y_i ($i = 1, 2$) (здесь и далее нижние индексы в переменных соответствуют: 1 - первой инерционной массе, 2 - второй инерционной массе, 3 - рамке) - смещения инерционных масс относительно рамки в направлении осей X и Y соответственно; x_3 и y_3 - смещения рамки относительно основания; α - угол поворота рамки относительно своей главной центральной оси симметрии, коллинеарной оси чувствительности Z . Вектор переносной угловой скорости направим вдоль оси Z и зададим как $\vec{\Omega} = \{0, 0, \Omega\}$.

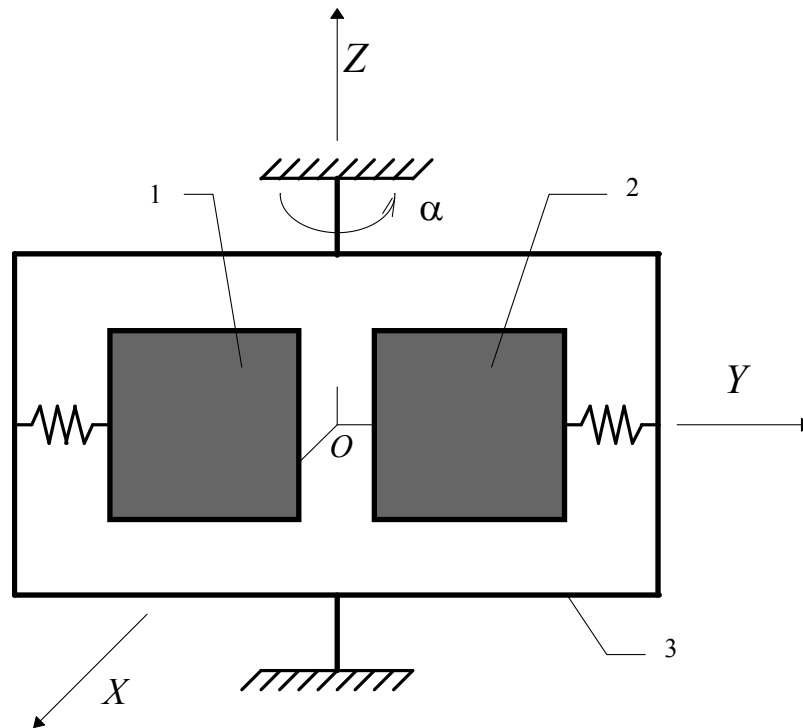


Рис.2.1. Чувствительный элемент камертонного гироскопа

В этом случае полная кинетическая энергия чувствительного элемента будет определяться по формуле

$$\begin{aligned}
 T = & \frac{I_3}{2}(\dot{\alpha} + \Omega)^2 + \frac{m_3}{2}[(\dot{x}_3 - y_3\Omega)^2 + (\dot{y}_3 + x_3\Omega)^2] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 m_i \{ [\dot{x}_3 - y_3\Omega + \\
 & + (\dot{x}_i - (\dot{\alpha} + \Omega)(y_i + (-1)^i r_0)) \cos \alpha - (\dot{y}_i + x_i(\dot{\alpha} + \Omega)) \sin \alpha]^2 + \\
 & + [(\dot{y}_i + x_i(\dot{\alpha} + \Omega)) \cos \alpha + (\dot{x}_i - (\dot{\alpha} + \Omega)(y_i + (-1)^i r_0)) \sin \alpha + \\
 & + \dot{y}_3 + x_3\Omega]^2,
 \end{aligned}$$

где r_0 - расстояние от оси Z до центров тяжести инерционных масс в состоянии покоя, m_i ($i = \overline{1,3}$) - масса i -того тела системы, I_3 - момент инерции рамки относительно главной центральной оси, которая параллельна оси Z .

Выражение для потенциальной энергии упругих деформаций подвеса чувствительного элемента будет иметь следующий вид:

$$P = \frac{1}{2} \left[c_\alpha \alpha^2 + \sum_{i=1}^3 (c_{xi} x_i^2 + c_{yi} y_i^2) \right],$$

где c_{xi}, c_{yi}, c_{zi} - линейная жесткости упругого подвеса для i -того тела системы в направлении соответствующих осей, c_α - угловая жесткость упругого подвеса рамки вокруг оси Z .

После подстановки выражений для потенциальной и кинетической энергии чувствительного элемента в уравнения Лагранжа 2-го рода и учета сил демпфирования получаем систему из семи дифференциальных уравнений движения чувствительного элемента камертонного гироскопа, линейная часть которых при постоянной угловой скорости имеет вид:

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}_1 + 2h_{x1}\dot{x}_1 + (k_{x1}^2 - \Omega^2)x_1 - 2\Omega(\dot{y}_1 + \dot{y}_3) + r_0\ddot{\alpha} + \ddot{x}_3 - x_3\Omega^2 &= q_{x1}(t), \\
 \ddot{y}_1 + 2h_{y1}\dot{y}_1 + (k_{y1}^2 - \Omega^2)y_1 + 2\Omega(\dot{x}_1 + \dot{x}_3) + r_0(\dot{\alpha} + \Omega)^2 + \ddot{y}_3 - y_3\Omega^2 &= q_{y1}(t), \\
 \ddot{x}_2 + 2h_{x2}\dot{x}_2 + (k_{x2}^2 - \Omega^2)x_2 - 2\Omega(\dot{y}_2 + \dot{y}_3) - r_0\ddot{\alpha} + \ddot{x}_3 - x_3\Omega^2 &= q_{x2}(t), \\
 \ddot{y}_2 + 2h_{y2}\dot{y}_2 + (k_{y2}^2 - \Omega^2)y_2 + 2\Omega(\dot{x}_2 + \dot{x}_3) - r_0(\dot{\alpha} + \Omega)^2 + \ddot{y}_3 - y_3\Omega^2 &= q_{y2}(t), \\
 \ddot{x}_3 + 2h_{x3}\dot{x}_3 + (k_{x3}^2 - \Omega^2)x_3 - 2\Omega\dot{y}_3 + \sum_{j=1}^2 d_j [\ddot{x}_j - 2\Omega\dot{y}_j - \Omega^2 x_j + & \\
 + (-1)^j (r_0\Omega^2\alpha - r_0\ddot{\alpha})] &= q_{x3}(t), \\
 \ddot{y}_3 + 2h_{y3}\dot{y}_3 + (k_{y3}^2 - \Omega^2)y_3 + 2\Omega\dot{x}_3 + \sum_{j=1}^2 d_j [\ddot{y}_j + 2\Omega\dot{x}_j - \Omega^2((-1)^j r_0 + y_j) - & \\
 - (-1)^j 2r_0\Omega\dot{\alpha}] &= q_{y3}(t), \\
 \ddot{\alpha} + 2h_\alpha\dot{\alpha} + k_\alpha^2\alpha + & \\
 + \sum_{j=1}^2 \frac{m_j}{I_3} \left[r_0^2\ddot{\alpha} - (-1)^j r_0 (\ddot{x}_j + \ddot{x}_3 - 2\Omega(\dot{y}_j + \dot{y}_3) - \Omega^2 x_3) \right] &= q_\alpha(t),
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $k_{xj}^2 = c_{xj}/m_j$, $k_{yj}^2 = c_{yj}/m_j$ ($j = 1, 2$), $k_{x3}^2 = c_{x3}/m$, $k_{y3}^2 = c_{y3}/m$, $k_\alpha^2 = c_\alpha/I_3$ - парциальные частоты движения чувствительного элемента в направлении соответствующих обобщенных координат; $m = \sum_{j=1}^3 m_j$ - масса чувствительного элемента; h_{xj} , h_{yj} , h_α ($j = 1, 2, 3$) - коэффициенты демпфирования; $d_j = m_j/m$ - безразмерный коэффициент инерционной асимметрии. В правых частях уравнений (2.1) стоят выражения для ускорений от обобщенных сил. Нахождение аналитического решения

системы уравнений (2.1) затруднительно. С другой стороны, движение чувствительного элемента камертонного микромеханического гироскопа, описываемое системой (2.1), может быть проанализировано численно.

При помощи гребенчатого двигателя (comb drive) колебания инерционных масс возбуждаются в противофазе (антипараллельный режим). Определяемые собственным поступательным движением инерционных масс по координатам y_j и переносным угловым движением основания, силы Кориолиса вызывают поступательное движение масс в направлении координат x_j и угловое движение рамки, обозначенное углом α . При идеально выполненном упругом подвесе и идеальной антипараллельности возбуждаемых колебаний рамка не будет совершать поступательных колебаний в направлении координат x_3 и y_3 , а только угловые по углу α . Эти соображения позволяют исключить из рассмотрения математической модели идеального прибора движение его чувствительного элемента в направлении координат x_3 и y_3 . Полные дифференциальные уравнения движения идеального чувствительного элемента имеют вид:

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}_1 + 2h_{x1}\dot{x}_1 + [k_{x1}^2 - (\dot{\alpha} + \Omega)^2]x_1 - 2(\dot{\alpha} + \Omega)\dot{y}_1 - (\ddot{\alpha} + \dot{\Omega})(y_1 - r_0) &= q_{x1}(t), \\
 \ddot{y}_1 + 2h_{y1}\dot{y}_1 + [k_{y1}^2 - (\dot{\alpha} + \Omega)^2]y_1 + 2(\dot{\alpha} + \Omega)\dot{x}_1 + \\
 + r_0(\dot{\alpha} + \Omega)^2 + (\ddot{\alpha} + \dot{\Omega})x_1 &= q_{y1}(t), \\
 \ddot{x}_2 + 2h_{x2}\dot{x}_2 + [k_{x2}^2 - (\dot{\alpha} + \Omega)^2]x_2 - 2(\dot{\alpha} + \Omega)\dot{y}_2 - (\ddot{\alpha} + \dot{\Omega})(y_2 + r_0) &= q_{x2}(t), \\
 \ddot{y}_2 + 2h_{y2}\dot{y}_2 + [k_{y2}^2 - (\dot{\alpha} + \Omega)^2]y_2 + 2(\dot{\alpha} + \Omega)\dot{x}_2 - \\
 - r_0(\dot{\alpha} + \Omega)^2 + (\ddot{\alpha} + \dot{\Omega})x_2 &= q_{y2}(t), \\
 \ddot{\alpha} + \dot{\Omega} + 2h_\alpha\dot{\alpha} + k_\alpha^2\alpha + \sum_{j=1}^2 \frac{m_j}{I_3} [\ddot{y}_j x_j - \ddot{x}_j r_j + (\dot{\alpha} + \Omega)(\dot{x}_j x_j + r_j \dot{y}_j) + \\
 + (\ddot{\alpha} + \dot{\Omega})(x_j^2 + r_j^2)] &= q_\alpha(t),
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

где $r_j = y_j + (-1)^j r_0$. Полная система дифференциальных уравнений (2.2) движения идеального чувствительного элемента камертонного гироскопа является нелинейной. Линейной частью уравнений (2.2) будет система

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2h_{x1}\dot{x}_1 + (k_{x1}^2 - \Omega^2)x_1 - 2\Omega\dot{y}_1 + r_0(\ddot{\alpha} + \dot{\Omega}) - \dot{\Omega}y_1 = q_{x1}(t), \\ \ddot{y}_1 + 2h_{y1}\dot{y}_1 + (k_{y1}^2 - \Omega^2)y_1 + 2\Omega\dot{x}_1 + r_0\Omega(2\dot{\alpha} + \Omega) + \dot{\Omega}x_1 = q_{y1}(t), \\ \ddot{x}_2 + 2h_{x2}\dot{x}_2 + (k_{x2}^2 - \Omega^2)x_2 - 2\Omega\dot{y}_2 - r_0(\ddot{\alpha} + \dot{\Omega}) - \dot{\Omega}y_2 = q_{x2}(t), \\ \ddot{y}_2 + 2h_{y2}\dot{y}_2 + (k_{y2}^2 - \Omega^2)y_2 + 2\Omega\dot{x}_2 - r_0\Omega(2\dot{\alpha} + \Omega) + \dot{\Omega}x_2 = q_{y2}(t), \\ \ddot{\alpha} + \dot{\Omega} + 2h_\alpha\dot{\alpha} + k_\alpha^2\alpha + \sum_{j=1}^2 \frac{m_j r_0}{I_3} \left[r_0(\ddot{\alpha} + \dot{\Omega}) + (-1)^j (2\dot{\Omega}y_j + 2\Omega\dot{y}_j - \ddot{x}_j) \right] = q_\alpha(t). \end{cases} \quad (2.3)$$

Полученные дифференциальные уравнения (2.1)-(2.3) описывают движение чувствительного элемента камертонного гироскопа на вращающемся основании под действием внешних сил, например таких, как силы, создаваемые системами возбуждения и компенсации. В приведенных выше уравнениях движения чувствительного элемента подразумевалось, что он имеет 7 (2.1) или 5 (2.2-2.3) степеней свободы. В уравнениях (2.2) и (2.3) кроме выходного совместного углового движения инерционных масс по углу α присутствует также и выходные собственные поступательные движения масс вдоль оси X . Подобное сложное движение чувствительного элемента отличается от общепринятого для камертонных гироскопов. Обычно считается, что инерционные массы совершают только поступательные возбуждаемые колебания вдоль оси Y и совместные угловые по углу α . В этом случае дифференциальные уравнения движения чувствительного элемента будут иметь вид:

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 + 2h_{y1}\dot{y}_1 + (k_{y1}^2 - \Omega^2)y_1 + r_0\Omega(\Omega + 2\dot{\alpha}) = q_{y1}(t), \\ \ddot{y}_2 + 2h_{y2}\dot{y}_2 + (k_{y2}^2 - \Omega^2)y_2 - r_0\Omega(\Omega + 2\dot{\alpha}) = q_{y2}(t), \\ \ddot{\alpha} + 2h_\alpha\dot{\alpha} + k_\alpha^2\alpha - 2d_1\Omega\dot{y}_1 + 2d_2\Omega\dot{y}_2 = q_\alpha(t), \end{cases} \quad (2.4)$$

где $k_\alpha^2 = c_\alpha/I$; $d_j = m_j r_0/I$, ($j=1,2$); $I = I_3 + (m_1 + m_2)r_0^2$ - общий осевой момент инерции рамки и инерционных масс относительно оси Z . Для идеального

(симметричного) чувствительного элемента выполняются следующие соотношения:

$$m_1 = m_2 = m, \quad c_{y1} = c_{y2} = c_y, \quad k_{y1} = k_{y2} = k_y, \quad d_1 = d_2 = d. \quad (2.5)$$

Тогда, после вычитания второго уравнения системы (2.4) из первого, введения новой переменной $y = y_1 - y_2$ и учета соотношений (2.5), систему (2.4) можно привести к виду:

$$\begin{cases} \ddot{y} + 2h_y \dot{y} + (k_y^2 - \Omega^2)y + 2r_0\Omega(\Omega + 2\dot{\alpha}) = q_y(t), \\ \ddot{\alpha} + 2h_\alpha \dot{\alpha} + k_\alpha^2 \alpha - 2d\Omega \dot{y} = q_\alpha(t), \end{cases} \quad (2.6)$$

где $q_y(t) = q_{y1}(t) - q_{y2}(t)$. Из уравнений (2.6) очевидно следует, что если инерционные массы возбуждаются синфазно, то угловые колебания чувствительного элемента по углу α , пропорциональные переносной угловой скорости Ω , не возникнут. Более подробный сравнительный анализ математических моделей динамики чувствительного элемента камертонного гироскопа, соответствующих уравнениям (2.3) и (2.6), будет приведен далее.

2.1.2. Анализ движения чувствительного элемента на вращающемся основании

Перед тем, как проводить анализ движения чувствительного элемента камертонного микромеханического гироскопа, определим какую из двух математических моделей, соответствующих уравнениям (2.3) и (2.6), принять в качестве идеальной (желаемой). Для этого сравним выходные характеристики чувствительных элементов с тремя и пятью степенями свободы.

Преобразуем систему уравнений (2.3) с учетом соотношений (2.5) и замены переменных $y_1 - y_2 = y, \quad x_1 - x_2 = x$. Для симметричного чувствительного элемента она примет вид:

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2h_x \dot{x} + (k_x^2 - \Omega^2)x - 2\Omega\dot{y} + 2r_0(\ddot{\alpha} + \dot{\Omega}) - \dot{\Omega}y = q_x(t), \\ \ddot{y} + 2h_y \dot{y} + (k_y^2 - \Omega^2)y + 2\Omega\dot{x} + 2r_0\Omega(2\dot{\alpha} + \Omega) + \dot{\Omega}x = q_y(t), \\ \ddot{\alpha} + \dot{\Omega} + 2h_\alpha \dot{\alpha} + k_\alpha^2 \alpha - d(2\dot{\Omega}y + 2\Omega\dot{y} - \ddot{x}) = q_\alpha(t). \end{cases} \quad (2.7)$$

Если на чувствительный элемент действуют только силы, создаваемые системой возбуждения (имеется в виду, что отсутствует система компенсации), и измеряемая угловая скорость постоянна, то систему уравнений (2.7) будет

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2h_x \dot{x} + (k_x^2 - \Omega^2)x - 2\Omega\dot{y} + 2r_0\ddot{\alpha} = 0, \\ \ddot{y} + 2h_y \dot{y} + (k_y^2 - \Omega^2)y + 2\Omega\dot{x} + 2r_0\Omega(2\dot{\alpha} + \Omega) = q_y(t), \\ \ddot{\alpha} + 2h_\alpha \dot{\alpha} + k_\alpha^2 \alpha - d(2\Omega\dot{y} - \ddot{x}) = 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

Применим преобразование Лапласа при нулевых начальных условиях ко всем уравнениям системы (2.8):

$$\begin{cases} (p^2 + 2h_x p + k_x^2 - \Omega^2)X(p) - 2\Omega p Y(p) + 2r_0 p^2 A(p) = 0, \\ 2\Omega p X(p) + (p^2 + 2h_y p + k_y^2 - \Omega^2)Y(p) + 2r_0 \Omega(2pA(p) + \Omega/p) = Q_y(p), \\ (p^2 + 2h_\alpha p + k_\alpha^2)A(p) - dp(2p\Omega Y(p) - pX(p)) = 0, \end{cases} \quad (2.9)$$

где $X(p) = L[x(t)]$, $Y(p) = L[y(t)]$, $A(p) = L[\alpha(t)]$, $Q_y(p) = L[q_y(t)]$.

Преобразование Лапласа для системы (2.6) при аналогичных допущениях будет

$$\begin{cases} (p^2 + 2h_y p + k_y^2 - \Omega^2)Y(p) + 2r_0 \Omega(\Omega/p + 2pA(p)) = Q_y(p), \\ (p^2 + 2h_\alpha p + k_\alpha^2)A(p) - 2d\Omega p Y(p) = 0. \end{cases} \quad (2.10)$$

Колебания чувствительного элемента, пропорциональные переносной угловой скорости, измеряются емкостной системой съема, обкладки которой расположены на корпусе прибора. Измеряемые на них суммарные перемещения l инерционных масс (при естественным образом реализуемой разностной схеме) могут быть вычислены для чувствительного элемента с пятью степенями свободы по формуле

$$l = (2r_0 + y)\sin\alpha + x \approx 2r_0\alpha + x, \quad (2.11)$$

или для системы с тремя степенями свободы

$$l = (2r_0 + y) \sin \alpha \approx 2r_0 \alpha. \quad (2.12)$$

Следует отметить, что $r_0 \gg x, y$. Численное решение систем уравнений (2.6) и (2.8) при аналогичных параметрах чувствительного элемента показывает, что амплитуда возбуждаемых колебаний инерционных масс в направлении оси Y в основном зависит от силы возбуждения $q_y(t)$, и слабо зависит от колебаний по координатам x и α . Это позволяет в данном рассмотрении с достаточной степенью точности принять уравнение относительно переменной y независимым от других и решать его отдельно. В этом случае, сравнивая уравнение для угловых перемещений чувствительного элемента в системе (2.10) с аналогичным уравнением в системе (2.9), видно, что из гироскопического эффекта, пропорционального колебаниям по координате y и угловой скорости, вычитаются колебания по координате x . С другой стороны, перемещения по x прибавляются к выходному перемещению l , как видно из формулы (2.11). Однако уменьшение угловых колебаний чувствительного элемента значительно более существенно сказывается на величине выходного перемещения l , так как умножается на r_0 ($r_0 \gg x, y$). Численное решение систем (2.9) и (2.10) показало, что коэффициент передачи по измеряемой угловой скорости для чувствительного элемента с тремя степенями свободы приблизительно в два раза больше, чем у аналогичной системы с пятью степенями свободы.

Проведенные исследования позволяют сделать вывод, что более чувствительным к переносной угловой скорости основания будет прибор, чувствительный элемент которого будет иметь три степени свободы: две поступательные по возбуждаемым координатам y_1 и y_2 , и одну угловую по координате α , которая описывает совместные угловые колебания инерционных масс и рамки вокруг оси Z . Приведенные выше уравнения (2.1)-(2.3) имеют право на существование, и позволяют анализировать численно и аналитически ряд погрешностей камертонного гироскопа.

Однако, анализ динамики идеального чувствительного элемента на вращающемся основании разумно проводить для трех степеней свободы, рассматривая остальные движения как паразитные.

Найдем амплитуду и фазу вынужденных угловых колебаний чувствительного элемента камертонного гироскопа с тремя степенями свободы. Для этого решим систему (2.10) относительно переменных $Y(p)$ и $A(p)$. Они имеют вид:

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{(k_\alpha^2 + 2h_\alpha p + p^2)(Q_y(p) - 2r_0\Omega^2/p)}{\Delta(p)}, \\ A(p) &= \frac{2d\Omega(pQ_y(p) - 2r_0\Omega^2)}{\Delta(p)}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\Delta(p) = (k_y^2 + 2h_y p + p^2 - \Omega^2)(k_\alpha^2 + 2h_\alpha p + p^2) + 8dr_0 p^2 \Omega^2,$$

или для малых угловых скоростей ($\Omega \ll k_y, k_\alpha$)

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{(k_\alpha^2 + 2h_\alpha p + p^2)Q_y(p)}{\Delta(p)}, \\ A(p) &= \frac{2dpQ_y(p)}{\Delta(p)}\Omega, \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\Delta(p) = (k_y^2 + 2h_y p + p^2)(k_\alpha^2 + 2h_\alpha p + p^2) + 8dr_0 p^2 \Omega^2.$$

Если разделить выражения для $Y(p)$ и $A(p)$ в (2.14) на $Q_y(p)$, то получим формулы для передаточных функций по возбуждению для колебаний по координатам y и α . Принимая в них $p = i\omega$, и вычисляя модули и фазы полученных комплексных передаточных функций, можем найти выражения для соответствующих амплитуд и фаз колебаний по координатам y и α .

Амплитуда колебаний инерционных масс по возбуждаемой координате определяется по формуле

$$A_y(\omega) = \frac{\sqrt{(k_\alpha^2 - \omega^2)^2 + 4h_\alpha^2\omega^2}}{\sqrt{|\Delta(i\omega)|^2}} Q_y \approx \frac{Q_y}{\sqrt{(k_y^2 - \omega^2)^2 + 4h_y^2\omega^2}}, \quad (2.15)$$

$$|\Delta(i\omega)|^2 = \left[(k_y^2 - \omega^2)(k_\alpha^2 - \omega^2) - 4\omega^2(h_y h_\alpha + 8dr_0\Omega^2) \right]^2 + 4\omega^2 \left[h_y(k_\alpha^2 - \omega^2) + h_\alpha(k_y^2 - \omega^2) \right]^2.$$

Здесь и далее Q_y - суммарная амплитуда ускорения от сил возбуждения, действующих на инерционные массы. График зависимости амплитуды возбуждаемых колебаний от частоты возбуждения представлен на рис. 2.2. Выражение для тангенса фазы возбуждаемых колебаний по координате y при малых значениях переносной угловой скорости будут

$$\operatorname{tg}(\varphi_y) \approx -\frac{2h_y\omega}{k_y^2 - \omega^2}. \quad (2.16)$$

График зависимости фазы колебаний по возбуждаемой координате y от частоты возбуждения приведен на рис. 2.3.

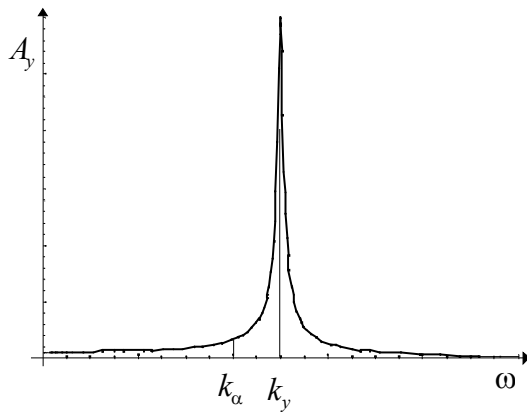


Рис. 2.2. АЧХ колебаний по координате y

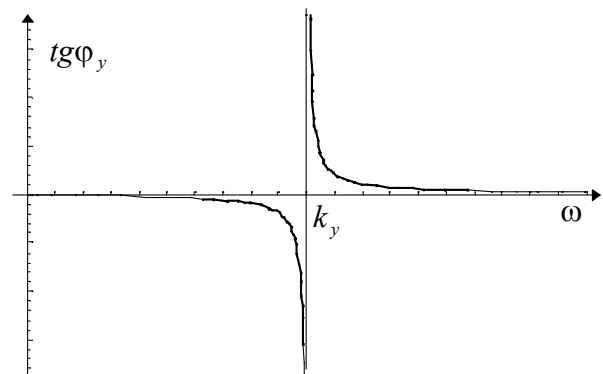


Рис. 2.3. ФЧХ колебаний по координате y

По графикам на рис. 2.2 и 2.3, которые построены по точным формулам для АЧХ и ФЧХ, видно, что колебания по возбуждаемой координате y очень слабо зависят от угловых колебаний по координате α . Это следует из отсутствия видимых резонансных особенностей на приведенных графиках.

Зависимость амплитуды угловых колебаний чувствительного элемента гироскопа от частоты возбуждения определяется по формуле

$$A_\alpha(\omega) = \frac{2d\omega Q_y}{\sqrt{|\Delta(i\omega)|^2}} \Omega, \quad (2.17)$$

где формула для $|\Delta(\omega)|^2$ аналогична формуле (2.15). График АЧХ угловых колебаний чувствительного элемента приведен на рис. 2.4. Фаза угловых колебаний чувствительного элемента вычисляется по формуле

$$\operatorname{tg}(\varphi_\alpha) = \frac{(k_y^2 - \omega^2)(k_\alpha^2 - \omega^2) - 4\omega^2(h_y h_\alpha + 8dr_0\Omega^2)}{2\omega[h_y(k_\alpha^2 - \omega^2) + h_\alpha(k_y^2 - \omega^2)]}. \quad (2.18)$$

График ФЧХ угловых колебаний чувствительного элемента приведен на рис. 2.5. По выражению (2.17) видно, что амплитуда угловых колебаний чувствительного элемента камертонного гироскопа пропорциональна переносной угловой скорости основания. Таким образом, измеряя амплитуду перемещений инерционных масс в направлении оси X вследствие угловых перемещений рамки, мы можем измерить угловую скорость основания.

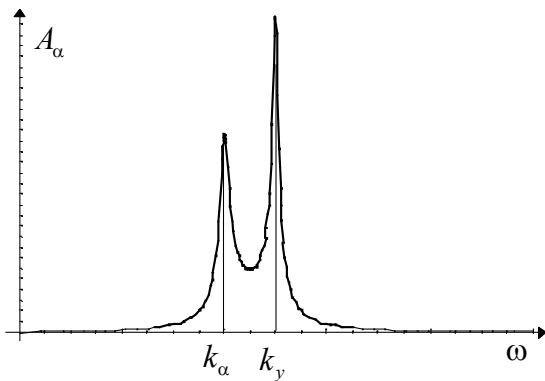


Рис. 2.4. АЧХ угловых колебаний чувствительного элемента

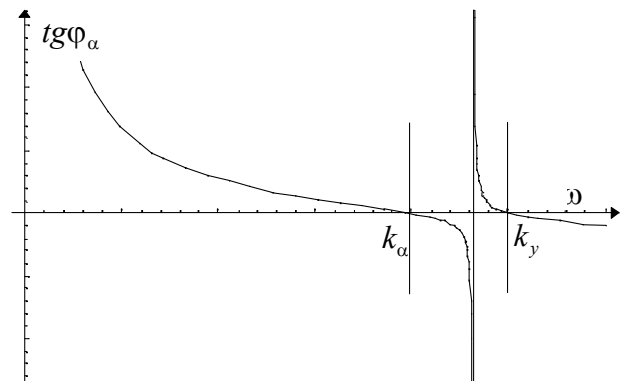


Рис. 2.5. ФЧХ угловых колебаний чувствительного элемента

Амплитуда A_l выходных колебаний, измеряемых емкостной системой съема, будет вычисляться по формуле

$$A_l = 2r_0 \sin A_\alpha \approx 2r_0 A_\alpha. \quad (2.19)$$

Рассчитанные численные значения амплитуды выходных колебаний от переносной угловой скорости для реального прибора, частота возбуждения которого принята $\omega = k_y$, приведены на рис. 2.6. Все численные данные на графиках здесь и далее приведены в системе Си: амплитуда в метрах, а угловая скорость - в рад/с.

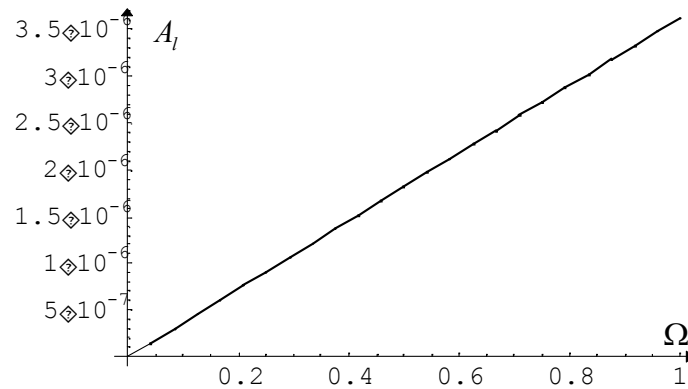


Рис. 2.6. Амплитуда выходных колебаний

Найдем выражения для собственных частот чувствительного элемента. Они будут определяться решениями характеристического уравнения

$$\Delta(p) = p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0, \quad (2.20)$$

где коэффициенты определяются из соотношений

$$a_0 = k_\alpha^2 (k_y^2 - \Omega^2), \quad a_1 = 2(h_y k_\alpha^2 + h_\alpha (k_y^2 - \Omega^2)),$$

$$a_2 = k_y^2 + k_\alpha^2 + 4h_y h_\alpha + (8dr_0 - 1)\Omega^2, \quad a_3 = 2(h_y + h_\alpha).$$

Полученное алгебраическое уравнение (2.20) не имеет точного аналитического решения. Найдем решение этого уравнения при отсутствии демпфирования. В этом случае $a_3 = a_1 = 0$, и приняв во внимание, что в уравнении (2.20) $p = \pm i\omega$, получаем выражение для собственных частот чувствительного элемента:

$$\omega_{j0}^2 = \frac{1}{2} \left[k_y^2 + k_\alpha^2 + (8dr_0 - 1)\Omega^2 \right] - \frac{(-1)^j}{2} \sqrt{\left(k_y^2 + k_\alpha^2 + (8dr_0 - 1)\Omega^2 \right)^2 - 4k_\alpha^2(k_y^2 - \Omega^2)}, \quad (2.21)$$

где $j=1,2$. Как видно из выражений (2.21), собственные частоты чувствительного элемента камертонного микромеханического гироскопа зависят от измеряемой угловой скорости основания.

Найдем диапазон устойчивости колебаний чувствительного элемента. Для этого воспользуемся алгебраическим критерием Рауса-Гурвица. Из условия положительности коэффициентов характеристического уравнения (2.20) находим минимальное значение угловой скорости Ω , при которой чувствительный элемент теряет устойчивость:

$$(a_0 > 0) \Rightarrow (|\Omega| < k_y). \quad (2.22)$$

Для малых угловых скоростей из диапазона устойчивости ($|\Omega| \ll k_y$) смещение собственных частот от измеряемой угловой скорости невелико и они приблизительно равны парциальным частотам чувствительного элемента.

2.1.3. Основные погрешности камертонного гироскопа

Разработка гироскопического прибора заданной точности требует детального изучения погрешностей, которые присутствуют в выходном сигнале датчика. Подобное исследование позволит разработать методы устранения погрешностей и повышения точности прибора. Рассмотрим основные источники погрешностей камертонного микромеханического вибрационного гироскопа, а также методы оценки и устранения этих погрешностей.

Влияние системы возбуждения. В приведенных выше исследованиях принималось, что в уравнениях (2.6) $q_\alpha(t) = 0$. В реальном приборе силы, создаваемые системой возбуждения, будут вызывать появление момента относительно оси чувствительности Z , который пропорционален величине

смещения инерционных масс из плоскости прибора. Для такого случая система (2.6) примет следующий вид:

$$\begin{cases} \ddot{y} + 2h_y \dot{y} + (k_y^2 - \Omega^2)y + 2r_0\Omega(\Omega + 2\dot{\alpha}) = q_y(t), \\ \ddot{\alpha} + 2h_\alpha \dot{\alpha} + (k_\alpha^2 - q_y(t)d)\alpha - 2d\Omega\dot{y} = 0. \end{cases} \quad (2.23)$$

Система уравнений (2.23) имеет нелинейность, аналогичную уравнению Матье, что приводит к появлению угловых колебаний чувствительного элемента на частоте, которая в 2 раза больше частоты возбуждения ω .

Пусть колебания инерционных масс возбуждаются гармонически. Тогда

$$q_y = \text{Im}\{q_{y0} e^{i\omega t}\},$$

где ω - частота возбуждения. Будем считать, что влияние угловых колебаний чувствительного элемента на возбуждаемые колебания инерционных масс вдоль оси Y пренебрежимо мало (см. (2.15)). В этом случае уравнения системы (2.23) можно решать отдельно. Частное решение первого уравнения будет:

$$y = \text{Im}\{\bar{A}_y e^{i\omega t}\}, \quad \bar{A}_y = \frac{q_{y0}}{k_y^2 - \omega^2 + 2h_y i\omega}. \quad (2.24)$$

Частное решение второго уравнения системы (2.23) будем искать по методу последовательных приближений в виде:

$$\alpha = \alpha_0 + \varepsilon\alpha_1 + \varepsilon^2\alpha_2 + \dots,$$

где ε - малый параметр. Решение уравнения в нулевом приближении ($\varepsilon = 0$) будет

$$\alpha_0 = \text{Im}\{\bar{A}_{\alpha 0} e^{i\omega t}\}, \quad \bar{A}_{\alpha 0} = \frac{2di\omega\Omega q_{y0}}{(k_\alpha^2 - \omega^2 + 2h_\alpha i\omega)(k_y^2 - \omega^2 + 2h_y i\omega)}. \quad (2.25)$$

Второе уравнение системы (2.23) относительно α_1 для первого приближения ($\varepsilon^2 = 0$) будет иметь вид:

$$\ddot{\alpha}_1 + 2h_\alpha \dot{\alpha}_1 + k_\alpha^2 \alpha_1 = q_y(t)\alpha_0 d.$$

Решение этого уравнения относительно α_1 будет выражаться зависимостью

$$\alpha_1 = \text{Im}\{\bar{A}_{\alpha 1} e^{i2\omega t}\}, \quad (2.26)$$

$$\bar{A}_{\alpha 1} = \frac{2d^2 i \omega q_{y0}^2 \Omega}{(k_\alpha^2 - \omega^2 + 2h_\alpha i \omega)(k_\alpha^2 - 4\omega^2 + 16h_\alpha i \omega)(k_y^2 - \omega^2 + 2h_y i \omega)}.$$

Если учесть, что $\bar{A}_{\alpha 0} = A_{\alpha 0} e^{i\varphi_{\alpha 0}}$ и $\bar{A}_{\alpha 1} = A_{\alpha 1} e^{i\varphi_{\alpha 1}}$, то отношение амплитуды $A_{\alpha 0}$ (колебаний, вызванных силой Кориолиса) к амплитуде $A_{\alpha 1}$ вычисляется по формуле

$$\delta A_\alpha = \frac{q_{y0} d}{\sqrt{(k_\alpha^2 - 4\omega^2)^2 + 16h_\alpha^2 \omega^2}}. \quad (2.27)$$

Из формулы (2.27) видно, что максимум относительной погрешности в амплитуде угловых колебаний будет в том случае, если $k_\alpha = 2\omega$. Для камертонного гироскопа, разработанного в Дрейперовской Лаборатории, уровень относительной погрешности δA_α составляет не более 6×10^{-6} .

Влияние гармонического характера угловой скорости. Ранее предполагалось, что вектор переносной угловой скорости основания постоянен во времени: $\vec{\Omega} = \{0, 0, \Omega\} = const$. Если угловая скорость вращения основания есть функция времени, то уравнения движения чувствительного элемента будут иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \ddot{y} + 2h_y \dot{y} + (k_y^2 - \Omega^2)y + 2r_0 \Omega (2\dot{\alpha} + \Omega) = q_y(t), \\ \ddot{\alpha} + 2h_\alpha \dot{\alpha} + k_\alpha^2 \alpha = d(2\dot{\Omega}y + 2\Omega \dot{y}) - \dot{\Omega}. \end{cases} \quad (2.28)$$

Зададим угловую скорость вращения основания в виде

$$\Omega = \text{Im}\{\Omega_0 e^{i\lambda t}\},$$

где λ - круговая частота угловой вибрации, с постоянной амплитудой.

Решение первого уравнения системы (2.28) принимаем в виде (2.24).

Второе уравнение системы (2.28) в этом случае примет вид

$$\ddot{\alpha} + 2h_\alpha \dot{\alpha} + k_\alpha^2 \alpha = \frac{d\Omega_0}{2} \text{Im}\left\{\bar{A}_y (2\omega + \lambda) e^{i(\omega+\lambda)t} - \bar{A}_y (2\omega - \lambda) e^{i(\omega-\lambda)t} - \frac{2i\lambda}{d} e^{i\lambda t}\right\}. \quad (2.29)$$

Частное решение уравнения (2.29) будет определяться соотношениями

$$\alpha(t) = \text{Im}\left\{A_{1\alpha} e^{i\varphi_1} e^{i(\omega+\lambda)t} + A_{2\alpha} e^{i\varphi_2} e^{i(\omega-\lambda)t} + A_{3\alpha} e^{i\varphi_3} e^{i\lambda t}\right\}, \quad (2.30)$$

$$A_{1\alpha,2\alpha} = \frac{d(2\omega \pm \lambda)\Omega_0 q_{y0}}{2\sqrt{(k_\alpha^2 - (\omega \pm \lambda)^2)^2 + 4h_\alpha^2(\omega \pm \lambda)^2} \sqrt{(k_y^2 - \omega^2)^2 + 4h_y^2\omega^2}},$$

$$A_{3\alpha} = \frac{\lambda\Omega_0 q_{y0}}{\sqrt{(k_\alpha^2 - \lambda^2)^2 + 4h_\alpha^2\lambda^2} \sqrt{(k_y^2 - \omega^2)^2 + 4h_y^2\omega^2}},$$

$$tg(\varphi_{1,2}) = -\frac{2\omega[h_\alpha(1 \pm \nu)(k_y^2 - \omega^2) + h_y(k_\alpha^2 - (1 \pm \nu)^2\omega^2)]}{k_\alpha^2(k_y^2 - \omega^2) - (1 + \nu)\omega^2[4h_\alpha h_y + (1 \pm \nu)(k_y^2 - \omega^2)]},$$

$$tg(\varphi_3) = -\frac{2\omega[h_\alpha(k_y^2 - \omega^2) + h_y(k_\alpha^2 - \lambda^2)]}{(k_y^2 - \omega^2)(k_\alpha^2 - \lambda^2) + 4h_\alpha h_y \omega \lambda}, \quad \nu = \lambda/\omega.$$

Если в выражениях (2.30) принять частоту вибрации $\lambda = 0$, то получим амплитуду угловых колебаний чувствительного элемента, вызванных постоянной угловой скоростью. Колебания, вызванные угловой вибрацией будут происходить на частотах $\lambda, \omega \pm \lambda$ и иметь амплитуды, определяемые по формулам (2.30). Устранение влияния угловой вибрации является задачей соответствующего выбора рабочей частоты прибора и выбора ширины полосы пропускания.

Ширина полосы пропускания. Отношение амплитуды, которая соответствует смещению от собственной частоты на $\Delta\omega$, к амплитуде в резонансе приближенно вычисляется по формуле:

$$\delta A = \frac{2h_\alpha(k_\alpha + \Delta\omega)}{\sqrt{4h_\alpha^2(k_\alpha + \Delta\omega)^2 + \Delta\omega^2(2k_\alpha + \Delta\omega)^2}}.$$

Для стандартного отношения $\delta A = 1/\sqrt{2}$ положительные решения этого уравнения относительно $\Delta\omega$ будут

$$\Delta\omega_{1,2} = \sqrt{k_\alpha^2 + h_\alpha^2} - k_\alpha \mp h_\alpha.$$

Тогда ширина полосы пропускания b будет вычисляться по формуле

$$b = \Delta\omega_2 - \Delta\omega_1 = 2h_\alpha. \quad (2.31)$$

Для измерения меняющихся во времени угловых скоростей необходимо обеспечить соответствующую им ширину полосы

пропускания, которая, как следует из формулы (2.31), зависит от демпфирования в чувствительном элементе.

Влияние поступательных ускорений и вибраций. Рассмотрим случай, когда основание прибора движется с постоянным поступательным ускорением w вдоль оси X , перпендикулярной плоскости датчика. В случае идеально симметричного чувствительного элемента поступательные ускорение и вибрация не будут создавать моментов вокруг измерительной оси. Допустим, что центр тяжести одной из инерционных масс смещен от симметричного положения на величину Δr ($\Delta r \ll r_0$), а в остальном чувствительный элемент остается идеальным. Уравнения движения чувствительного элемента примут в этом случае следующего вида:

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 + 2h_{y1}\dot{y}_1 + (k_{y1}^2 - \Omega^2)y_1 + r_0\Omega(\Omega + 2\dot{\alpha}) = q_{y1}(t), \\ \ddot{y}_2 + 2h_{y2}\dot{y}_2 + (k_{y2}^2 - \Omega^2)y_2 - (r_0 + \Delta r)\Omega(\Omega + 2\dot{\alpha}) = q_{y2}(t), \\ \ddot{\alpha} + 2h_{\alpha}\dot{\alpha} + k_{\alpha}^2\alpha - 2d_0\Omega\dot{y}_1 + 2(d_0 + \Delta d)\Omega\dot{y}_2 = w\Delta d. \end{cases} \quad (2.32)$$

Здесь $d_0 = mr_0 / [I_3 + m(r_0 + \Delta r) + mr_0^2]$, $\Delta d = d_0 \Delta r / r_0$. Пренебрегая влиянием угловых колебаний чувствительного элемента на колебания вдоль оси Y , запишем частное решение последнего уравнения системы (2.32), соответствующее поступательным ускорениям, в виде:

$$\alpha_w = \frac{w\Delta d}{k_{\alpha}^2} = const. \quad (2.33)$$

Как и предполагалось, постоянное ускорение приводит к появлению постоянной составляющей в регистрируемых колебаниях чувствительного элемента, которая автоматически устраняется фильтрацией выходных колебаний при демодуляции. В случае поступательной вибрации с частотой λ ускорение в правой части третьего уравнения системы (2.32) запишется в виде

$$w = w_0 \sin \lambda t.$$

Комплексные амплитуды возбуждаемых колебаний инерционных масс будут

$$\bar{A}_{y1} = \bar{A}_{y2} \approx \frac{q_{y0}}{k_y^2 - \omega^2 + 2h_y i \omega}, \quad (2.34)$$

где ω - частота возбуждения инерционных масс. Частное решение третьего уравнения системы (2.32), которое соответствует поступательной вибрации, будем искать в виде:

$$\alpha_\lambda = \text{Im}\{\bar{A}_\lambda e^{i\lambda t}\}. \quad (2.35)$$

После подстановки (2.35) в (2.32) находим амплитуду угловых колебаний чувствительного элемента, которая вызвана поступательной вибрацией:

$$A_\lambda = \frac{w_0 \Delta d}{\sqrt{(k_\alpha^2 - \lambda^2)^2 + 4h_\alpha^2 \lambda^2}}. \quad (2.36)$$

Если вибрация будет поступать на частоте λ , которая сильно отличается от рабочей частоты ω , то влияние вибрации на регистрируемые выходные колебания будет ослабеваться самым чувствительным элементом. Если частота вибрации совпадает с частотой возбуждения чувствительного элемента, то естественного ее ослабления происходить не будет, что приведет к появлению погрешности измерения угловой скорости. Найдем относительную погрешность измерения угловой скорости, которая вызвана поступательной вибрацией основания с частотой возбуждения ($\lambda = \omega$), для несимметричного чувствительного элемента. Комплексная амплитуда полезных колебаний в указанном случае может быть определена по формуле

$$\bar{A}_\alpha = \frac{2\Omega\omega q_{y0}(2d_0 + \Delta d)}{(k_y^2 - \omega^2 + 2h_y i \omega)(k_\alpha^2 - \omega^2 + 2h_\alpha i \omega)}. \quad (2.37)$$

Относительная погрешность δA_λ определим как отношение амплитуды, вызванной вибрацией, к полезной амплитуде (2.37):

$$\delta A_\lambda = \frac{A_\lambda}{A_\alpha} = \frac{w_0 \Delta d \sqrt{(k_y^2 - \omega^2)^2 + 4h_y^2 \omega^2}}{2\Omega\omega q_{y0}(2d_0 + \Delta d)}. \quad (2.38)$$

Качественный график зависимости относительной погрешности от частоты возбуждения показан на рис. 2.7.

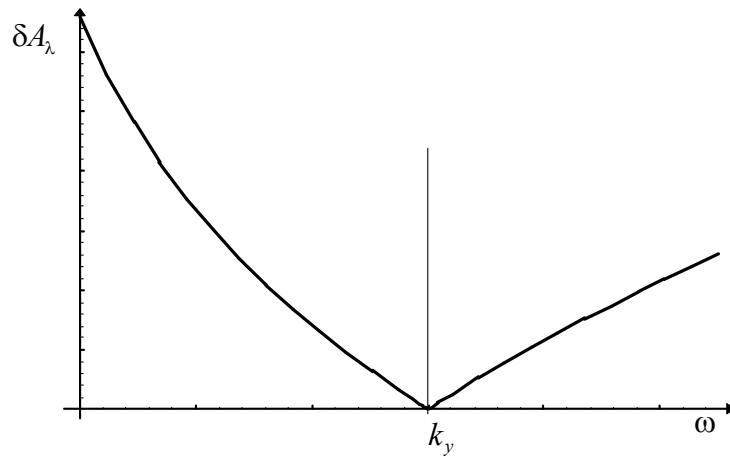


Рис. 2.7. Зависимость δA_λ от частоты возбуждения

На приведенном графике видно, что относительная погрешность от поступательной вибрации имеет минимум при некоторой частоте возбуждения. Найдем эту частоту. Для этого приравняем нулю производную от δA_λ по ω :

$$\frac{d}{d\omega}(\delta A_\lambda) = \frac{d}{d\omega} \left(\frac{w_0 \Delta d \sqrt{(k_y^2 - \omega^2)^2 + 4h_y^2 \omega^2}}{2\Omega \omega q_{y0} (2d_0 + \Delta d)} \right) = 0. \quad (2.39)$$

Решая уравнение (2.39) относительно частоты ω находим четыре корня, из которых действительный и положительный равен

$$\omega = k_y. \quad (2.40)$$

При относительном смещении центра тяжести $\Delta r/r_0 = 0.01$ относительная погрешность при выполнении условия (2.40) будет $\delta A_\lambda \approx 0.03$. В то же время, если частота возбуждения $\omega = 1.01k_y$, то $\delta A_\lambda \approx 30$. Таким образом, выбирая частоту возбуждения равной собственной парциальной частоте колебаний инерционных масс вдоль оси Y , мы значительно уменьшаем влияние поступательной вибрации основания на точность измерения угловой скорости.

Несимметричность чувствительного элемента может выражаться не только в относительном смещении центра тяжести инерционных масс, но и в различных инерционных характеристиках. Следует отметить, что эффект

от несимметричности инерционных (массовых) характеристик аналогичен рассмотренному эффекту дебаланса, и может быть проанализирован аналогичными математическими зависимостями.

Другим наиболее существенным источником погрешностей для камертонных микромеханических гироскопов может стать наличие ненулевых перекрестных жесткостей упругого подвеса. Однако, если прибор использует чувствительный элемент с тремя степенями свободы, то подобной технологической погрешности можно избежать.

2.1.4. Выводы

Анализ динамики и погрешностей камертонного микромеханического гироскопа показал, что амплитуда угловых колебаний чувствительного элемента пропорциональна угловой скорости вращения основания. Информацию о знаке угловой скорости можно почерпнуть из фазы регистрируемых колебаний. Следует отметить, что чувствительный элемент, обладающий пятью степенями свободы, проигрывает в чувствительности элементу, который построен по классической камертонной схеме с тремя степенями свободы (две возбуждаемые поступательные и одна выходная вращательная). К достоинствам камертонной схемы с тремя степенями свободы можно отнести практическую нечувствительность ее точности к поступательным ускорениям и угловой вибрации. Чувствительность к поступательной вибрации может быть значительно ослаблена выбором частоты возбуждения, равной парциальной частоте входных колебаний инерционных масс. Однако, использование угловых колебаний чувствительного элемента для измерения угловой скорости накладывает существенные ограничения на степень миниатюризации датчика. Это объясняется тем, что емкостная система регистрации выходных колебаний измеряет поступательные перемещения инерционных масс.

2.2. Кардановая схема микромеханического гироскопа

Кардановый микромеханический гироскоп, разработанный в 80-х годах специалистами Дрейперовской Лаборатории, стал прототипом для последующих разработок, которые начались в Украине [40, 41] и России [42]. Разработка карданового микромеханического гироскопа в Украине велась учеными Национального технического университета Украины “Киевский политехнический институт” совместно с технологами Киевского научно-исследовательского института “Орион”. В результате был изготовлен экспериментальный образец карданового микромеханического вибрационного гироскопа, фотографии которого приведены рис. 2.8 и 2.9. На рис. 2.8 хорошо видны наружная и внутренняя рамки чувствительного элемента, а на рис. 2.9 просматриваются обкладки систем возбуждения и съема. Первичные колебания чувствительного элемента возбуждались в резонансе при помощи электростатической системы возбуждения с частотой $f \approx 5530$ Гц. Рассмотрим исследования динамики и погрешностей карданового микромеханического гироскопа, которые проводились при участии автора в рамках указанного проекта.

2.2.1. Кинематическая схема и уравнения движения чувствительного элемента

Микромеханический вибрационный гироскоп, построенный с использованием кардановой схемы, не имеет вращающихся частей, а вместо этого используется вибрация вокруг торсионов. Гироскоп представляет собой кардановую конструкцию с массивным элементом, смонтированным на внутренней кардановой рамке. Внутренняя кардановая рамка может рассматриваться как гироскопический элемент, а внешняя - как мотор.

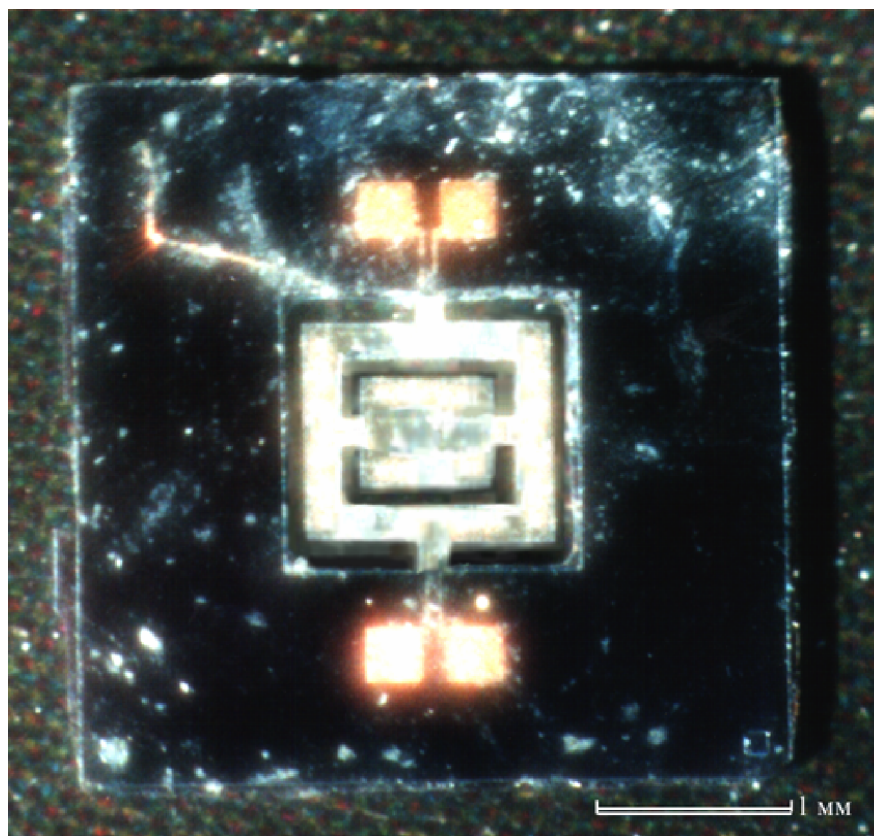


Рис. 2.8. Чувствительный элемент карданового гироскопа

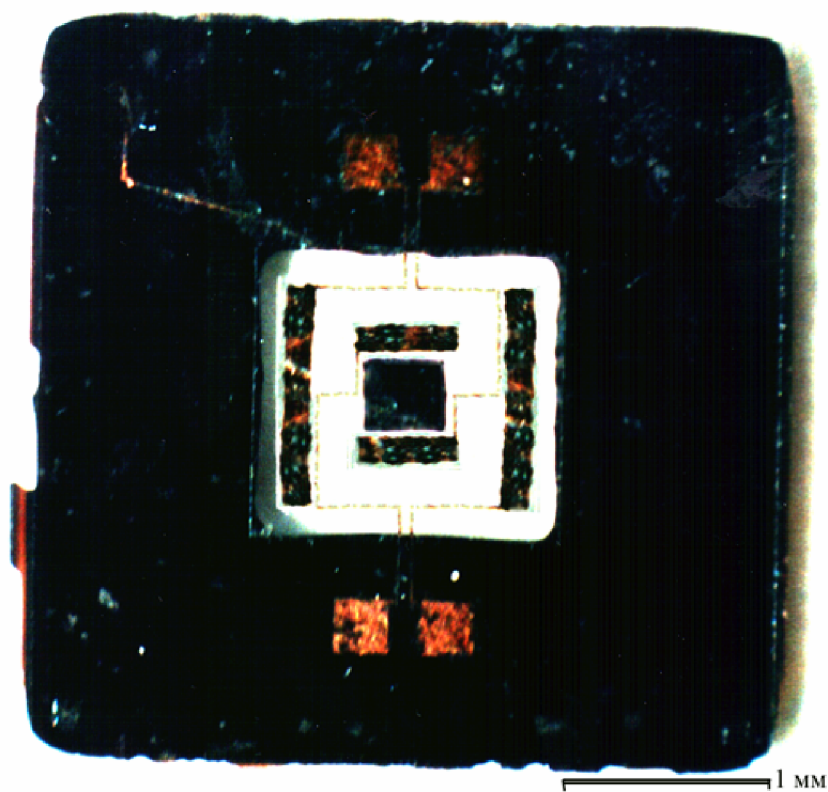


Рис. 2.9. Элементы системы возбуждения и съема

Внешняя и внутренняя рамки соединены при помощи торсионов. Торсионы имеют малую жесткость на кручение по сравнению с жесткостью на изгиб. Внешняя рамка совершает вынужденные угловые колебания с малой амплитудой и высокой частотой вокруг оси своих торсионов (оси Y на рис. 2.10).

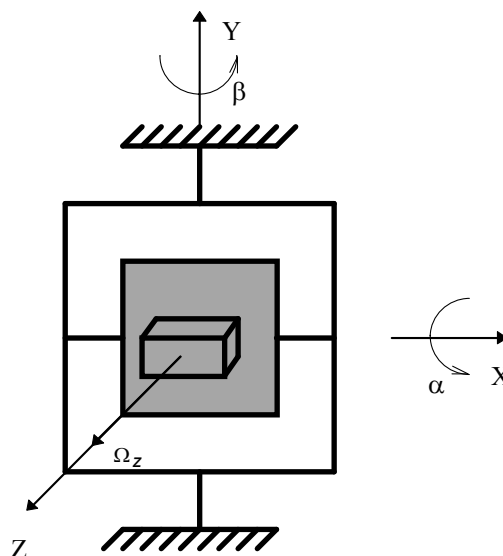


Рис.2.10. Кардановая схема микромеханического вибрационного гироскопа.

При этом внутренняя рамка становится чувствительной к угловой скорости, направленной по оси перпендикулярной плоскости гироскопа. Она совершает угловые колебания вокруг оси своих торсионов с амплитудой и фазой, которые зависят от переносной угловой скорости. Возбуждение вынужденных колебаний может осуществляться электростатически, а измерение выходного сигнала - при помощи емкостного датчика. Электроды напыляются на поверхности внешней и внутренней кардановых рамок.

Уравнения движения чувствительного элемента. Составим дифференциальные уравнения движения чувствительного элемента карданового микромеханического гироскопа. Кардановая схема вибрационного гироскопа имеет две степени свободы. Положение чувствительного элемента в пространстве однозначно определяется двумя обобщенными координатами. В качестве обобщенных координат примем

угол поворота внешней кардановой рамки относительно корпуса и угол поворота внутренней рамки относительно внешней. Обозначим эти углы β и α соответственно (рис. 2.10). Введем декартовые системы координат, связанные с основанием прибора, внешней и внутренней рамками. Они имеют общее начало в точке пересечения осей подвеса гироскопа. Обозначим их $Ox_i y_i z_i$, где $i=0$ - для системы координат, связанной с основанием прибора, $i=1$ - с внешней рамкой и $i=2$ - связанную с внутренней рамкой. Переносную угловую скорость зададим ее проекциями на систему координат, связанную с основанием прибора: $\vec{\Omega} = \{\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z\}$. Получим выражения для ее проекций в системах координат, связанных с внешней и внутренней рамками. Проецируя вектор абсолютной угловой скорости на оси систем координат, связанных с внешней и внутренней рамками, можем записать следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \Omega_{x_1} &= \Omega_x \cos\beta - \Omega_z \sin\beta \\ \Omega_{y_1} &= \Omega_y + \dot{\beta} \\ \Omega_{z_1} &= \Omega_x \sin\beta + \Omega_z \cos\beta \end{aligned} \right\}, \quad (2.41)$$

$$\Omega_{x_2} = \Omega_x \cos\beta - \Omega_z \sin\beta + \dot{\alpha}, \quad (2.42)$$

$$\Omega_{y_2} = (\Omega_y + \dot{\beta}) \cos\alpha + (\Omega_x \sin\beta + \Omega_z \cos\beta) \sin\alpha,$$

$$\Omega_{z_2} = (\Omega_x \sin\beta + \Omega_z \cos\beta) \cos\alpha - (\Omega_y + \dot{\beta}) \sin\alpha.$$

Дифференциальные уравнения движения чувствительного элемента получим при помощи уравнений Лагранжа 2-го рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}} - \frac{\partial T}{\partial \beta} = M_\beta, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial T}{\partial \alpha} = M_\alpha, \quad (2.43)$$

где T - полная кинетическая энергия системы, которую находим в виде

суммы кинетических энергий ее элементов $T = \sum_{i=1}^2 T_i$, а T_i находим из

$$\text{соотношения } 2T_i = I_{x_i} \Omega_{x_i}^2 + I_{y_i} \Omega_{y_i}^2 + I_{z_i} \Omega_{z_i}^2 - 2I_{x_i y_i} \Omega_{x_i} \Omega_{y_i} - 2I_{y_i z_i} \Omega_{y_i} \Omega_{z_i} - 2I_{z_i x_i} \Omega_{z_i} \Omega_{x_i}.$$

Если учесть, что конструкция чувствительного элемента гироскопа симметрична относительно центра масс, то его центробежные моменты инерции равны нулю, и выражение для кинетической энергии примет вид:

$$T = \frac{1}{2} \left(I_{x_1} \Omega_{x_1}^2 + I_{y_1} \Omega_{y_1}^2 + I_{z_1} \Omega_{z_1}^2 + I_{x_2} \Omega_{x_2}^2 + I_{y_2} \Omega_{y_2}^2 + I_{z_2} \Omega_{z_2}^2 \right). \quad (2.44)$$

Обобщенные силы в правой части уравнений (2.43) имеют вид:

$$M_\beta = -c_1 \dot{\beta} - f_1 \beta + M_2(t), \quad M_\alpha = -c_2 \dot{\alpha} - f_2 \alpha,$$

где c_1, c_2 - угловые жесткости торсионов, f_1, f_2 - коэффициенты демпфирования внешней и внутренней рамок соответственно, $M_2(t)$ - момент внешних сил, вызывающих вынужденные колебания наружной рамки. Кардановая конструкция чувствительного элемента подразумевает малые амплитуды угловых колебаний по углам α и β . Это позволяет линеаризовать тригонометрические функции, приняв

$$\sin \alpha \approx \alpha, \quad \cos \alpha \approx 1, \quad \sin \beta \approx \beta, \quad \cos \beta \approx 1,$$

и пренебречь членами, в которые эти углы входят в степенях, выше первой. Подставляя выражение для кинетической энергии (2.44) в уравнения (2.43) и, принимая во внимание малость обобщенных координат, получаем для произвольного вектора угловой скорости вращения основания $\vec{\Omega}$ дифференциальные уравнения движения чувствительного элемента карданового микромеханического гироскопа

$$\begin{cases} I_1 \ddot{\alpha} + (f_1 + \dot{I}_1) \dot{\alpha} + c_1 \alpha - G \Omega_z \dot{\beta} - D_1 (\Omega_y^2 - \Omega_z^2) \alpha - \\ - (\Omega_z \dot{I}_1 + \dot{\Omega}_z I_1 - D_1 \Omega_x \Omega_y) \beta + D_1 \Omega_y \Omega_z + \Omega_x \dot{I}_1 + \dot{\Omega}_x I_1 = 0, \\ I_2 \ddot{\beta} + (f_2 + \dot{I}_2) \dot{\beta} + c_2 \beta + G \Omega_z \dot{\alpha} - D_2 (\Omega_x^2 - \Omega_z^2) \beta + \\ + (D_1 \Omega_x \Omega_y - \dot{D}_1 \Omega_z - \dot{\Omega}_z D_1) \alpha - D_2 \Omega_x \Omega_z + \Omega_y \dot{I}_2 + \dot{\Omega}_y I_2 = M_2(t), \end{cases} \quad (2.45)$$

где I_1, I_2, G, D_1 и D_2 - коэффициенты, зависящие от геометрических параметров конструкции следующим образом:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{x_2}, \quad I_2 = I_{y_1} + I_{y_2}, \quad G = I_{x_2} + I_{y_2} - I_{z_2}, \\ D_1 &= I_{z_2} - I_{y_2}, \quad D_2 = I_{z_1} + I_{z_2} - I_{x_1} - I_{x_2}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Для постоянных геометрических характеристик полученную систему уравнений можно преобразовать к виду

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} + 2h_1\dot{\alpha} + k_1^2\alpha - g_1\Omega_z\dot{\beta} - d_1(\Omega_y^2 - \Omega_z^2)\alpha - \\ - (\dot{\Omega}_z - d_1\Omega_x\Omega_y)\beta + d_1\Omega_y\Omega_z + \dot{\Omega}_x = 0, \\ \ddot{\beta} + 2h_2\dot{\beta} + k_2^2\beta + g_2\Omega_z\dot{\alpha} - d_2(\Omega_x^2 - \Omega_z^2)\beta + \\ + d_3(\Omega_x\Omega_y - \dot{\Omega}_z)\alpha - d_2\Omega_x\Omega_z + \dot{\Omega}_y = m_2(t), \end{cases} \quad (2.47)$$

где $h_i = f_i/2I_i$, $k_i^2 = c_i/I_i$, $d_i = D_i/I_i$, $g_i = G/I_i$, $d_3 = D_1/I_2$, $m_2(t) = M_2(t)/I_2$, ($i = 1,2$). Полученные системы дифференциальных уравнений описывают поведение чувствительного элемента карданового микромеханического гироскопа при переменном как по величине, так и по направлению произвольно ориентированном векторе переносной угловой скорости $\vec{\Omega}$. Для постоянного, но произвольно ориентированного по отношению к плоскости прибора вектора переносной угловой скорости система упростится и примет вид

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} + 2h_1\dot{\alpha} + k_1^2\alpha - g_1\Omega_z\dot{\beta} - d_1(\Omega_y^2 - \Omega_z^2)\alpha + d_1\Omega_y(\Omega_x\beta + \Omega_z) = 0, \\ \ddot{\beta} + 2h_2\dot{\beta} + k_2^2\beta + g_2\Omega_z\dot{\alpha} - d_2(\Omega_x^2 - \Omega_z^2)\beta + \Omega_x(d_3\Omega_y\alpha - d_2\Omega_z) = m_2(t). \end{cases} \quad (2.48)$$

Если вектор измеряемой переносной угловой скорости ориентирован перпендикулярно плоскости прибора (рис. 2.10), то есть $\vec{\Omega} = \{0,0,\Omega\}$, то система (2.48) будет иметь вид

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} + 2h_1\dot{\alpha} + (k_1^2 + d_1\Omega^2)\alpha - g_1\Omega\dot{\beta} = 0, \\ \ddot{\beta} + 2h_2\dot{\beta} + (k_2^2 + d_2\Omega^2)\beta + g_2\Omega\dot{\alpha} = m_2(t). \end{cases} \quad (2.49)$$

Полученные уравнения (2.49) являются нелинейными относительно измеряемой величины - Ω . Кроме этого, в общем случае коэффициенты уравнений являются функциями времени. Нахождение решений такой системы подразумевает использование упрощающих допущений.

2.2.2. Анализ движения чувствительного элемента на вращающемся основании

Движение чувствительного элемента на неподвижном основании.

Рассмотрим поведение чувствительного элемента кардановой схемы микромеханического вибрационного гироскопа на неподвижном основании. В этом случае переносная угловая скорость $\Omega = 0$ и система дифференциальных уравнений движения (2.49) преобразуется к виду

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} + 2h_1\dot{\alpha} + k_1^2\alpha = 0, \\ \ddot{\beta} + 2h_2\dot{\beta} + k_2^2\beta = m_2(t). \end{cases} \quad (2.50)$$

Как видим, система дифференциальных уравнений распадается на два независимых линейных дифференциальных уравнения второго порядка относительно обобщенных координат. При гармоническом возбуждении колебаний наружной рамки выражение для момента, создаваемого системой возбуждения, принимает следующий вид: $m_2(t) = m_2 \sin(\omega t + \sigma)$. Общим решением совокупности уравнений (2.50) будут следующие зависимости обобщенных координат от времени [70]:

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= 0, \\ \beta(t) &= B_0 e^{-h_2 t} \sin\left(t\sqrt{k_2^2 - h_2^2} + \beta_0\right) + \frac{m_2}{\sqrt{(k_2^2 - \omega^2)^2 + 4h_2^2\omega^2}} \sin(\omega t + \gamma), \end{aligned} \quad (2.51)$$

где постоянные коэффициенты B_0 и β_0 определяются из начальных условий, а фаза вынужденных колебаний γ определяется из соотношения

$$\operatorname{tg}(\sigma - \gamma) = 2h\omega / (k_2^2 - \omega^2).$$

Из анализа полученных решений (2.51) видно, что наружная рамка чувствительного элемента совершает вынужденные колебания с амплитудой, пропорциональной моменту сил системы возбуждения (после затухания собственных колебаний) вокруг оси Y , в то время как внутренняя рамка остается неподвижной, и выходной сигнал будет равен нулю.

Движение чувствительного элемента на вращающемся основании.

Изучим теперь поведение чувствительного элемента карданового микромеханического вибрационного гироскопа на вращающемся с

постоянной угловой скоростью основании. Не ограничивая общности задачи мы будем полагать, что вектор переносной угловой скорости ориентирован вдоль оси Z , то есть $\vec{\Omega} = \{0, 0, \Omega\}$. Движение чувствительного элемента будет описываться в этом случае системой дифференциальных уравнений (2.49). При гармоническом возбуждении угловых колебаний наружной рамки с частотой ω и нулевой фазой момент, действующий на нее, может быть задан следующим образом $m_2(t) = \text{Re}\{m_2 e^{i\omega t}\}$. Колебания наружной и внутренней рамок, соответствующие частному решению системы неоднородных дифференциальных уравнений (2.49), будем искать в виде

$$\alpha(t) = \text{Re}\{\bar{A} e^{i\omega t}\}, \quad \bar{A} = A e^{i\varphi_1}, \quad \beta(t) = \text{Re}\{\bar{B} e^{i\omega t}\}, \quad \bar{B} = B e^{i\varphi_2}, \quad (2.52)$$

где A и B - амплитуды угловых колебаний внутренней и наружной рамок соответственно, а φ_1 и φ_2 - их фазы. После подстановки выражений (2.52) для углов поворота наружной и внутренней рамок в систему (2.49) получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно комплексных амплитуд \bar{A} и \bar{B} этих поворотов

$$\begin{cases} (k_1^2 + d_1\Omega^2 - \omega^2 + 2h_1i\omega)\bar{A} - g_1\Omega i\omega\bar{B} = 0, \\ g_2\Omega i\omega\bar{A} + (k_2^2 + d_2\Omega^2 - \omega^2 + 2h_2i\omega)\bar{B} = m_2. \end{cases} \quad (2.53)$$

Главный определитель этой системы записывается, как

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}(\omega) = & (k_1^2 + d_1\Omega^2 - \omega^2)(k_2^2 + d_2\Omega^2 - \omega^2) - (4h_1h_2 + g_1g_2\Omega^2)\omega^2 + \\ & + 2i\omega[h_1(k_2^2 + d_2\Omega^2 - \omega^2) + h_2(k_1^2 + d_1\Omega^2 - \omega^2)]. \end{aligned}$$

Решение системы (2.53) относительно комплексных амплитуд, найденное по методу Крамера, будет

$$\bar{A} = g_1 m_2 i \omega \Omega / \bar{\Delta}(\omega), \quad \bar{B} = m_2 (k_1^2 + d_1\Omega^2 - \omega^2 + 2h_1i\omega) / \bar{\Delta}(\omega). \quad (2.54)$$

Таким образом, обеспечив на входе системы возбуждение колебаний наружной рамки, на выходе мы получаем колебания внутренней рамки, пропорциональные измеряемой переносной угловой скорости. Поэтому, для определения зависимости параметров угловых колебаний внутренней

рамки от измеряемой угловой скорости найдем выражения для амплитуды и фазы этих колебаний. В результате перехода от комплексной амплитуды к действительной получаем следующие выражения для амплитуды

$$A = g_1 m_2 \omega \Omega / \sqrt{\Delta^2}, \quad (2.55)$$

$$\Delta^2 = \left[(k_1^2 + d_1 \Omega^2 - \omega^2)(k_2^2 + d_2 \Omega^2 - \omega^2) - (4h_1 h_2 + g_1 g_2 \Omega^2) \omega^2 \right]^2 + 4\omega^2 \left[h_1 (k_2^2 + d_2 \Omega^2 - \omega^2) + h_2 (k_1^2 + d_1 \Omega^2 - \omega^2) \right]^2$$

и фазы

$$\operatorname{tg}(\varphi_1) = \frac{(k_1^2 + d_1 \Omega^2 - \omega^2)(k_2^2 + d_2 \Omega^2 - \omega^2) - (4h_1 h_2 + g_1 g_2 \Omega^2) \omega^2}{2\omega \left[h_1 (k_2^2 + d_2 \Omega^2 - \omega^2) + h_2 (k_1^2 + d_1 \Omega^2 - \omega^2) \right]} \quad (2.56)$$

угловых колебаний внутренней рамки микромеханического вибрационного гироскопа. График зависимости амплитуды колебаний внутренней рамки от частоты возбуждения представлен на рис.2.11. Из анализа этого графика видно, что большая амплитуда выходных колебаний будет при возбуждении чувствительного элемента с частотой входных колебаний, то есть $\omega = k_2$. Амплитуда регистрируемых поступательных перемещений обкладок системы съема, расположенных на внутренней рамке чувствительного элемента, полученная для экспериментального образца разрабатываемого карданового микромеханического гироскопа (см. рис. 2.8), при возбуждении его на собственной частоте первичных колебаний ($f \approx 5530$ Гц), приведена на рис. 2.12. Анализ данных на рис. 2.12 показывает, что зависимость амплитуды от угловой скорости вращения основания является линейной в достаточно широком диапазоне угловых скоростей.

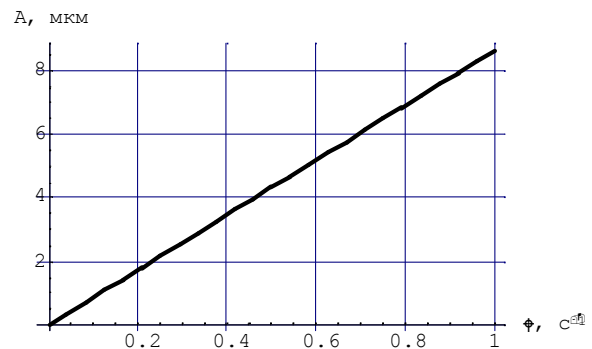
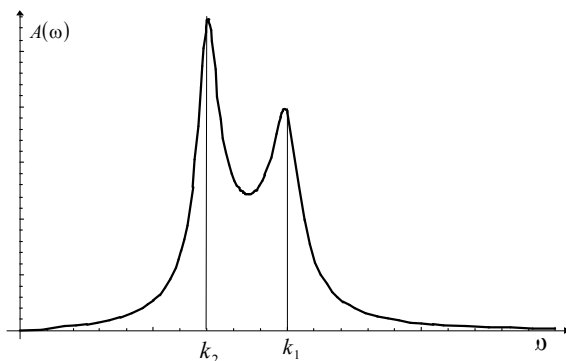


Рис. 2.11. Зависимость амплитуды колебаний внутренней рамки от частоты возбуждения.

Рис. 2.12. Амплитуда регистрируемых колебаний внутренней рамки

Собственные частоты чувствительного элемента гироскопа.

Найдем собственные частоты угловых колебаний наружной и внутренней рамок. Характеристическое уравнение для системы (2.49) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta(p) &= p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0, \\ a_3 &= 2(h_1 + h_2), \quad a_2 = 4h_1 h_2 + k_1^2 + k_2^2 + (d_1 + d_2 + g_1 g_2) \Omega^2, \\ a_1 &= 2[h_1 k_2^2 + h_2 k_1^2 + (d_2 h_1 + d_1 h_2) \Omega^2], \\ a_0 &= k_1^2 k_2^2 + (d_2 k_1^2 + d_1 k_2^2) \Omega^2 + d_1 d_2 \Omega^4. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Корни уравнения (2.57) могут быть найдены приближенно. Если принять вязкое трение отсутствующим, то $a_1 = a_3 = 0$ и тогда характеристическое уравнение может быть решено как биквадратное

$$\begin{aligned} p^4 + b_1 p^2 + b_0 &= 0, \\ b_1 &= k_1^2 + k_2^2 + (d_1 + d_2 + g_1 g_2) \Omega^2, \\ b_0 &= (k_1^2 + d_1 \Omega^2)(k_2^2 + d_2 \Omega^2) = k_1^2 k_2^2 + (k_1^2 d_2 + k_2^2 d_1) \Omega^2 + d_1 d_2 \Omega^4. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Корни биквадратного характеристического уравнения (2.58) соотносятся с собственными частотами ω_{j0} угловых колебаний наружной и внутренней рамок следующим образом:

$$p_{1,2} = \pm i \omega_{10}, \quad p_{3,4} = \pm i \omega_{20}. \quad (2.59)$$

Решая уравнение (2.58) и учитывая соотношения (2.59), можем записать выражения для квадратов собственных частот при отсутствии вязкого трения

$$\begin{aligned} \omega_{j0}^2 &= \frac{1}{2} [k_1^2 + k_2^2 + (d_1 + d_2 + g_1 g_2) \Omega^2] - \\ &- \frac{(-1)^j}{2} \sqrt{[k_1^2 + k_2^2 + (d_1 + d_2 + g_1 g_2) \Omega^2]^2 - 4(k_1^2 + d_1 \Omega^2)(k_2^2 + d_2 \Omega^2)}, \end{aligned} \quad (2.60)$$

$$j = 1, 2; \quad \omega_{10} > \omega_{20}.$$

График зависимостей собственных частот от измеряемой угловой скорости представлен на рис. 2.13.

Теперь найдем выражения для собственных частот угловых колебаний чувствительного элемента микромеханического вибрационного гироскопа с учетом вязкого трения, учитывая его малость. Представим уравнение (2.57) в виде

$$\Delta(p) = (p^2 + 2h_{10} + \omega_1^2)(p^2 + 2h_{20} + \omega_2^2), \quad (2.61)$$

где ω_j - собственные частоты при малом демпфировании; h_{j0} - коэффициенты демпфирования. Раскрывая скобки и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях оператора дифференцирования p в выражениях (2.57) и (2.61), получим систему четырех алгебраических уравнений для определения ω_1 , ω_2 , h_{10} и h_{20} . С учетом малости коэффициентов вязкого трения можем найти следующие значения для корней уравнения (2.61):

$$p_{1,2} = -h_{10} \pm i\omega_1; \quad p_{3,4} = -h_{20} \pm i\omega_2, \quad (2.62)$$

где $h_{10} = \frac{a_3\omega_{10}^2 - a_1}{2(\omega_{10}^2 - \omega_{20}^2)}$; $h_{20} = \frac{a_1 - a_3\omega_{20}^2}{2(\omega_{10}^2 - \omega_{20}^2)}$; $\omega_1 \approx \omega_{10}$; $\omega_2 \approx \omega_{20}$. Аналогичные

соотношения для динамически настраиваемых гироскопов были приведены в [21].

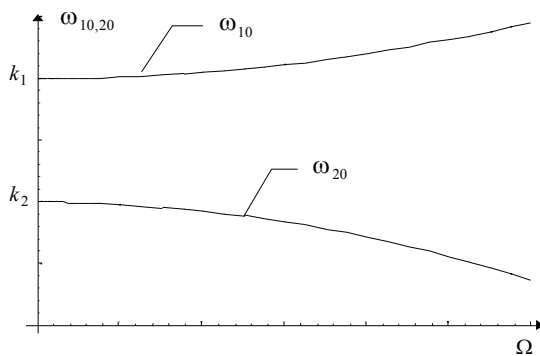


Рис. 2.13. Зависимость собственных частот от переносной угловой скорости

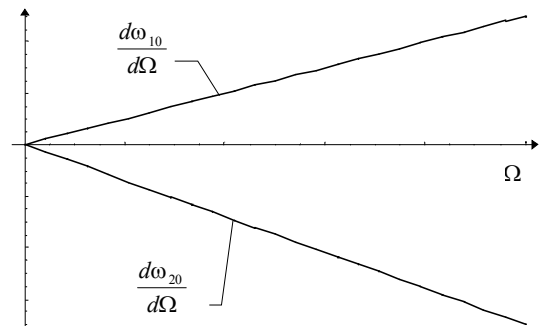


Рис. 2.14. Первая производная j -той частоты как функция угловой скорости

Если проанализировать графики зависимости первой производной для собственных частот системы от переносной угловой скорости (рис. 2.14), то нетрудно видеть, что эта зависимость близка к линейной. Из этого следует, что зависимость самой собственной частоты, определяемой по формуле (2.60), от переносной угловой скорости близка к квадратичной. Будем искать выражения для собственных частот чувствительного элемента микромеханического вибрационного гироскопа при отсутствии демпфирования в следующем виде:

$$\omega_j(\Omega) = k_j + q_j \frac{\Omega^2}{2}, \quad (2.63)$$

где $j=1,2$; q_j - некоторый постоянный коэффициент, зависящий только от параметров конструкции. Нахождение постоянной составляющей в выражении (2.63) очевидно, так как из формулы (2.60)

$$\left(\omega_{0j}^2\right)_{\Omega=0} = k_j^2.$$

Продифференцируем обе части выражения (2.63):

$$\frac{d\omega_j}{d\Omega} = q_j \Omega.$$

Поскольку q_j не зависит от переносной угловой скорости, то приняв $\Omega = 1$ мы получаем необходимую для ее нахождения зависимость

$$q_j = \left(\frac{d\omega_j}{d\Omega}\right)_{\Omega=1}.$$

Дифференцируя по Ω выражения (2.60) и принимая $\Omega = 1$ после упрощения и приведения подобных слагаемых, получаем

$$q_j = \left(\frac{s_3}{2} + \frac{(-1)^j}{2} \frac{2s_2 - s_1 s_3}{\sqrt{s_1^2 - 4s_0}}\right) / \sqrt{2s_1 - (-1)^j 2\sqrt{s_1^2 - 4s_0}}, \quad (2.64)$$

где

$$s_0 = (k_1^2 + d_1)(k_2^2 + d_2), \quad s_1 = k_1^2 + k_2^2 + d_1 + d_2 + g_1 g_2,$$

$$s_2 = 2(d_1 k_2^2 + d_2 k_1^2 + 2d_1 d_2), \quad s_3 = 2(d_1 + d_2 + g_1 g_2).$$

Представление собственных частот чувствительного элемента микромеханического вибрационного гироскопа в виде (2.63) позволяет упростить процесс их исследования и анализ. Численный анализ выражения (2.63) показал, что для малых угловых скоростей ($\Omega \ll k_j$) изменения собственных частот из-за изменений угловой скорости малы и ими можно пренебрегать.

2.2.3. Основные погрешности карданового гироскопа

Перекрестная чувствительность карданового гироскопа.

Рассмотрим случай, когда квазипостоянный вектор переносной угловой скорости ориентирован в пространстве произвольным образом, то есть $\bar{\Omega} = \{\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z\}$. Поведение чувствительного элемента карданового вибрационного гироскопа будет описываться системой дифференциальных уравнений (2.48), которая является линейной. Исходя из принципа суперпозиции, результирующее движение внутренней рамки будет представляться в виде совокупности движений системы от каждого из аддитивных воздействий. Реакцией системы на постоянное воздействие будет постоянное смещение по углам отклонения наружной и внутренней рамок, которое может быть найдено из системы алгебраических уравнений

$$\begin{cases} (k_1^2 + d_1\Omega_z^2 - d_1\Omega_y^2)\alpha_0 + d_1\Omega_x\Omega_y\beta_0 = -d_1\Omega_y\Omega_z, \\ d_3\Omega_x\Omega_y\alpha_0 + (k_2^2 + d_2\Omega_z^2 - d_2\Omega_x^2)\beta_0 = d_2\Omega_x\Omega_z. \end{cases} \quad (2.65)$$

Решая систему (2.65) относительно постоянных углов поворота внутренней рамки α_0 и наружной β_0 , получаем

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= -\frac{d_1\Omega_y\Omega_z(k_2^2 + d_2\Omega_z^2)}{(k_1^2 + d_1\Omega_z^2 - d_1\Omega_y^2)(k_2^2 + d_2\Omega_z^2 - d_2\Omega_x^2) - d_1d_3\Omega_x^2\Omega_y^2}, \\ \beta_0 &= \frac{d_2\Omega_x\Omega_z(k_1^2 + d_1\Omega_z^2 + d_1\Omega_y^2)(d_3 - d_2)/d_2}{(k_1^2 + d_1\Omega_z^2 - d_1\Omega_y^2)(k_2^2 + d_2\Omega_z^2 - d_2\Omega_x^2) - d_1d_3\Omega_x^2\Omega_y^2}. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Очевидно, что постоянная составляющая может быть легко исключена из выходного сигнала при помощи фильтрации его на рабочей частоте. Отбрасывая постоянное воздействие, преобразуем систему (2.48) к виду

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} + 2h_1\dot{\alpha} + k_1^2\alpha - g_1\Omega_z\dot{\beta} - d_1(\Omega_y^2 - \Omega_z^2)\alpha + d_1\Omega_y\Omega_x\beta = 0, \\ \ddot{\beta} + 2h_2\dot{\beta} + k_2^2\beta + g_2\Omega_z\dot{\alpha} - d_2(\Omega_x^2 - \Omega_z^2)\beta + d_3\Omega_y\Omega_x\alpha = m_2(t). \end{cases} \quad (2.67)$$

Колебания наружной и внутренней рамок, соответствующие частному решению системы неоднородных дифференциальных уравнений при гармоническом возбуждении, будем искать в виде (2.52). После подстановки выражений (2.52) в систему (2.67) и последующего упрощения получаем систему алгебраических уравнений относительно комплексных амплитуд

$$\begin{cases} (k_1^2 + d_1\Omega_z^2 - d_1\Omega_y^2 - \omega^2 + 2h_1i\omega)\bar{A} - (g_1\Omega_zi\omega - d_1\Omega_x\Omega_y)\bar{B} = 0, \\ (g_2\Omega_zi\omega + d_3\Omega_x\Omega_y)\bar{A} + (k_2^2 + d_2\Omega_z^2 - d_2\Omega_x^2 - \omega^2 + 2h_2i\omega)\bar{B} = m_2. \end{cases} \quad (2.68)$$

Главный определитель этой системы имеет виде

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}(\omega) = & (k_1^2 + d_1\Omega_z^2 - d_1\Omega_y^2 - \omega^2)(k_2^2 + d_2\Omega_z^2 - d_2\Omega_x^2 - \omega^2) - \\ & - (4h_1h_2 + g_1g_2\Omega_z^2)\omega^2 - d_1d_3\Omega_x^2\Omega_y^2 + \\ & + 2i\omega[h_1(k_2^2 + d_2\Omega_z^2 - d_2\Omega_x^2 - \omega^2) + h_2(k_1^2 + d_1\Omega_z^2 - d_1\Omega_y^2 - \omega^2)]. \end{aligned}$$

Решение системы (2.68) относительно комплексных амплитуд будет

$$\begin{aligned} \bar{A} &= m_2(g_1\Omega_zi\omega - d_1\Omega_x\Omega_y)/\bar{\Delta}(\omega), \\ \bar{B} &= m_2(k_1^2 + d_1\Omega_z^2 - d_1\Omega_y^2 - \omega^2 + 2h_1i\omega)/\bar{\Delta}(\omega). \end{aligned} \quad (2.69)$$

Выходным сигналом системы являются колебания внутренней рамки, пропорциональные измеряемой переносной угловой скорости. При произвольной ориентации вектора измеряемой переносной угловой скорости получаем следующую амплитуду колебаний внутренней рамки чувствительного элемента:

$$A = \sqrt{(g_1^2\omega^2\Omega_z^2 + d_1^2\Omega_x^2\Omega_y^2)/\bar{\Delta}^2}, \quad (2.70)$$

$$\begin{aligned} \Delta^2 = & \left[(k_1^2 + d_1\Omega_z^2 - d_1\Omega_y^2 - \omega^2)(k_2^2 + d_2\Omega_z^2 - d_2\Omega_x^2 - \omega^2) - \right. \\ & \left. - 4h_1h_2\omega^2 - (g_1g_2\omega^2\Omega_z^2 + d_1d_3\Omega_x^2\Omega_y^2) \right]^2 + \\ & + 4\omega^2 \left[h_1(k_2^2 + d_2\Omega_z^2 - d_2\Omega_x^2 - \omega^2) + h_2(k_1^2 + d_1\Omega_z^2 - d_1\Omega_y^2 - \omega^2) \right]^2. \end{aligned}$$

Выделим в полученном выражении (2.70) полезную и вредную составляющие:

$$A \approx A_{(z)} + A_{(xy)}. \quad (2.71)$$

Полезной будем считать часть амплитуды $A_{(z)}$, определяемую составляющей переносной угловой скорости Ω_z , перпендикулярной плоскости прибора. Чувствительность по другим направлениям, представленную как часть $A_{(xy)}$, будем считать вредной. Разложим числитель формулы (2.70) в ряд Макларена и удержим первые два члена этого разложения

$$\sqrt{g_1^2\omega^2\Omega_z^2 + d_1^2\Omega_x^2\Omega_y^2} \approx 1 + \frac{d_1^2\Omega_x^2\Omega_y^2}{2g_1^2\omega^2\Omega_z^2}. \quad (2.72)$$

После подстановки полученного приближенного представления (2.72) в выражение (2.70) получаем формулы для составляющих (2.71):

$$A_{(z)} = \frac{g_1\omega\Omega_z}{\sqrt{\Delta^2}}, \quad (2.73)$$

$$A_{(xy)} = \frac{d_1^2\Omega_x^2\Omega_y^2}{2g_1\omega\Omega_z\Delta}, \quad (\Omega_z \neq 0)$$

$$A_{(xy)} = \frac{d_1\Omega_x\Omega_y}{\Delta_0}, \quad (\Omega_z = 0)$$

$$\begin{aligned} \Delta_0^2 = & \left[(k_1^2 - d_1\Omega_y^2 - \omega^2)(k_2^2 - d_2\Omega_x^2 - \omega^2) - 4h_1h_2\omega^2 - d_1d_3\Omega_x^2\Omega_y^2 \right]^2 + \\ & + 4\omega^2 \left[h_1(k_2^2 - d_2\Omega_x^2 - \omega^2) + h_2(k_1^2 - d_1\Omega_y^2 - \omega^2) \right]^2. \end{aligned}$$

Полученные выражения (2.73) позволяют оценить погрешность измерения составляющей, перпендикулярной плоскости прибора, произвольно ориентированного в инерциальном пространстве вектора переносной угловой скорости. Построим диаграмму перекрестной чувствительности

карданового микромеханического вибрационного гироскопа. Для этого положим вектор переносной угловой скорости лежащим в плоскости прибора XU и единичным по величине. В этом случае его проекции на оси X и Y могут быть заданы в полярной системе координат

$$\begin{cases} \Omega_x = \cos \varphi \\ \Omega_y = \sin \varphi \end{cases}$$

Изменяя полярный угол φ от 0 до 360° и откладывая по направлению полярного радиуса величину $A_{(xy)}$ - вредной составляющей амплитуды колебаний внутренней рамки чувствительного элемента, получим диаграмму перекрестной чувствительности, представленную на рис. 2.14.

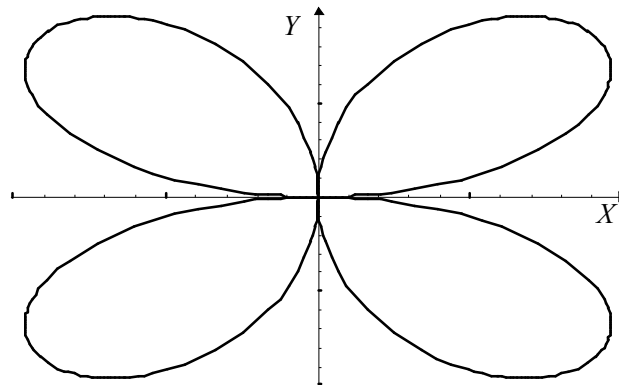


Рис. 2.15. Диаграмма перекрестной чувствительности микромеханического гироскопа

Анализируя полученную диаграмму видим, что максимальной вредная составляющая от перекрестной чувствительности будет в случае, когда проекция вектора переносной угловой скорости на плоскость чувствительного элемента будет направлена вдоль биссектрис координатных углов.

Выбор параметров массивного элемента. В полученных ранее системах дифференциальных уравнений и их решениях, описывающих динамику чувствительного элемента кардановой схемы микромеханического вибрационного гироскопа, присутствуют постоянные

коэффициенты, зависящие только от параметров конструкции. Это дает нам возможность выбирать те или иные геометрические соотношения в конструкции чувствительного элемента с точки зрения достижения желаемых свойств полученных решений. Наиболее интересными с точки зрения оптимизации представляются g_1, g_2 - коэффициенты при гироскопической перекрестной связи, d_1, d_2, d_3 - коэффициенты составляющих, определяющих динамические погрешности гироскопа. Следует отметить, что коэффициенты d_1 и d_2 отражают наличие в дифференциальных уравнениях квадрата измеряемой переносной угловой скорости, что влечет за собой очевидное снижение диапазона линейного ее измерения. Кроме этого, коэффициенты d_1 и d_3 характеризуют перекрестную чувствительность гироскопа. Исходя из приведенных выше соображений можем сформулировать следующие требования к оптимизации конструктивных параметров чувствительного элемента карданового микромеханического вибрационного гироскопа:

$$g_i \rightarrow \max, \quad (i = 1, 2), \quad d_j \rightarrow 0, \quad (j = 1, 2, 3). \quad (2.74)$$

С учетом обозначений (2.46) условия (2.74) запишутся в виде

$$G = I_{x2} + I_{y2} - I_{z2} \rightarrow \max, \quad (2.75)$$

$$D_1 = I_{z2} - I_{y2} \rightarrow 0, \quad D_2 = I_{z1} + I_{z2} - I_{x1} - I_{x2} \rightarrow 0.$$

Выражения (2.75) являются одними из возможных условий оптимизации параметров конструкции чувствительного элемента микромеханического вибрационного гироскопа. Разработанные вычислительные программы для персонального компьютера позволяют численно варьировать любые размеры чувствительного элемента и в автоматическом режиме производить их выбор с точки зрения удовлетворения полученным условиям оптимизации (2.75). Однако наиболее удобной представляется оптимизация путем выбора размеров инерционной массы, размещенной на внутренней рамке чувствительного элемента. Это обуславливается тем, что согласно используемым в настоящее время технологиям инерционная

масса, имеющая форму параллелепипеда, изготавливается отдельно от остальной конструкции чувствительного элемента гироскопа. В этом случае оптимизацию системы можно проводить без внесения изменений в основной технологический процесс изготовления упругого подвеса.

Получим аналитические выражения, позволяющие вычислять размеры инерционной массы, удовлетворяющие условиям (2.75). Выражения для моментов инерции внутренней рамки как функции размеров инерционной массы имеют вид:

$$\begin{aligned} I_{x2} &= I_{x20} + \frac{\rho X_m Y_m Z_m}{12} (Y_m^2 + 4Z_m^2), \\ I_{y2} &= I_{y20} + \frac{\rho X_m Y_m Z_m}{12} (X_m^2 + 4Z_m^2), \\ I_{z2} &= I_{z20} + \frac{\rho X_m Y_m Z_m}{12} (X_m^2 + Y_m^2), \end{aligned} \quad (2.76)$$

где X_m , Y_m , Z_m - размеры инерционной массы в направлении соответствующих осей; ρ - плотность материала массы; I_{x20} , I_{y20} , I_{z20} - моменты инерции внутренней рамки без учета инерционной массы. С учетом (2.76) выражения для максимизируемого коэффициента гироскопической перекрестной связи G и минимизируемого коэффициента D_1 могут быть записаны следующим образом:

$$G = G_0 + \frac{2}{3} \rho X_m Y_m Z_m^3, \quad D_1 = D_{10} + \frac{\rho}{12} X_m (Y_m^3 Z_m - 4Z_m^3 Y_m), \quad (2.77)$$

где $G_0 = I_{x20} + I_{y20} - I_{z20}$, $D_{10} = I_{z20} - I_{y20}$ - значения соответствующих коэффициентов без учета инерционной массы. Анализируя полученные выражения (2.77), можно сделать очевидное заключение, что коэффициент гироскопической чувствительности системы возрастает пропорционально третьей степени линейного размера инерционной массы в направлении оси Z . С другой стороны, увеличение этого линейного размера инерционной массы имеет чисто технологические ограничения. Из этого следует, что линейный размер инерционной массы в направлении оси Z необходимо выбирать максимально возможным с учетом технологии изготовления.

Дальнейшую оптимизацию будем проводить, варьируя линейные размеры инерционной массы в направлении других осей X и Y . Приравнявая нулю выражение для коэффициента D_1 , из (2.77) получаем уравнение для нахождения оптимальных размеров инерционной массы:

$$X_m(Y_m^3 Z_m - 4Z_m^3 Y_m) + \frac{12D_{10}}{\rho} = 0. \quad (2.78)$$

Уравнение (2.78) представляет собой нелинейное алгебраическое уравнение относительно трех переменных - размеров инерционной массы. Решения уравнения (2.78) могут быть найдены численно при помощи прямого перебора всех допустимых значений переменных. Диапазоны варьирования размеров инерционной массы ограничиваются технологическими и конструктивными особенностями микромеханического вибрационного гироскопа. Максимальные значения размеров X_m и Y_m определяются соответствующими размерами внутренней рамки гироскопа, а высота массы Z_m - технологией ее изготовления. С другой стороны, согласно выражению для G (2.77), повышение гироскопической чувствительности требует увеличения размеров инерционной массы.

Приведенные выше соображения, позволяют найти решения уравнения (2.78) при условии фиксации одного или нескольких размеров массы максимально возможным значением с точки зрения конкретной конструктивной или технологической реализации. Размер Z_m инерционной массы следует выбрать настолько большим, насколько это позволяет сделать технология ее изготовления. Остальные размеры мы можем варьировать в пределах, обусловленными конструкцией внутренней рамки. Если конструкция внутренней рамки позволяет изготовить инерционную массу с размером $Y_m > X_m$, то выбрав фиксированными максимально возможные значения для размеров $Y_m = Y_{m0}$ и $Z_m = Z_{m0}$, то можем записать

формулу для вычисления оптимального размера инерционной массы в направлении оси X:

$$X_m = \frac{12D_{10}}{\rho(4Z_{m0}^3 Y_{m0} - Y_{m0}^3 Z_{m0})}. \quad (2.79)$$

Если же конструкция внутренней рамки позволяет изготавливать инерционную массу с размером $X_m > Y_m$, то фиксируя размеры $Z_m = Z_{m0}$ и $X_m = X_{m0}$, размер Y_m находим как решение уравнения

$$D_1 = Y_m^3 Z_{m0} - 4Z_{m0}^3 Y_m + \frac{12D_{10}}{\rho X_{m0}} = 0. \quad (2.80)$$

Оптимальным размером инерционной массы в направлении оси Y, будет максимальное положительное решение уравнения (2.80). График на рис. 2.16 демонстрирует взаимное расположение неотрицательных корней уравнения (2.80). Корни уравнения (2.80), найденные при помощи формул Кардано, имеют вид:

$$Y_m^{(1)} = 4pZ_{m0}^2 + \frac{1}{3p}, \quad (2.81)$$

$$Y_m^{(2)} = -2p(1+i\sqrt{3})Z_{m0}^2 - \frac{1-i\sqrt{3}}{6p}, \quad Y_m^{(3)} = -2p(1-i\sqrt{3})Z_{m0}^2 - \frac{1+i\sqrt{3}}{6p},$$

где $p = (2^{1/3} \rho X_{m0} Z_{m0}) / \left[\rho^2 X_{m0}^2 Z_{m0}^2 \left(\sqrt{104976D_{10}^2 - 6912\rho^2 X_{m0}^2 Z_{m0}^8} - 324D_{10} \right) \right]^{1/3}$.

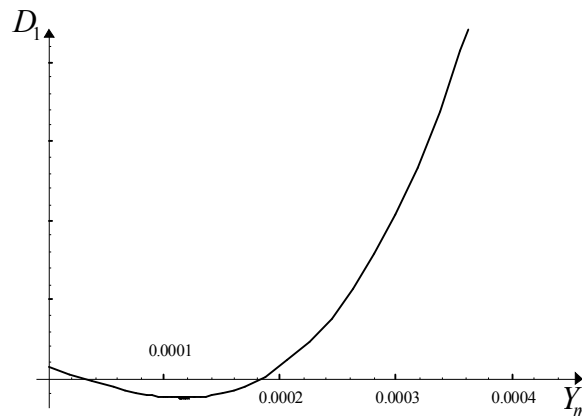


Рис. 2.16. Значения коэффициента D_1 при варьировании размера по оси Y

Изготовление инерционной массы чувствительного элемента микромеханического вибрационного гироскопа по оптимальным размерам,

которые можно легко вычислить при помощи формул (2.79) и (2.81), позволяет сделать несущественной перекрестную чувствительность системы и увеличить диапазон линейности измерения переносной угловой скорости.

Температурная погрешность. Одним из возможных источников погрешности измерения переносной угловой скорости в микромеханическом вибрационном гироскопе является зависимость параметров конструкции от изменения температуры. Это вызвано изменением геометрических размеров элементов конструкции чувствительного элемента с изменением температуры.

Рассмотрим сначала зависимость изменения жесткости торсионов чувствительного элемента от температуры. Допустим, что торсион имеет форму параллелепипеда. При линейном расширении размеры торсиона в направлении соответствующих координатных осей будут следующими функциями изменения температуры ΔT :

$$l_{cx} = l_{cx0}(1 + \gamma_x \Delta T), \quad l_{cy} = l_{cy0}(1 + \gamma_y \Delta T), \quad l_{cz} = l_{cz0}(1 + \gamma_z \Delta T), \quad (2.82)$$

где l_{cx0} , l_{cy0} , l_{cz0} - значения соответствующих линейных размеров при начальной температуре; γ_x , γ_y , γ_z - коэффициенты линейного расширения материала торсиона в направлении соответствующих координатных осей. Угловая жесткость рассматриваемого торсиона вычисляется следующим образом:

$$c = G \frac{l_{cx} l_{cz}^3}{3l_{cy}}, \quad (2.83)$$

где G - модуль Юнга 2-го рода для материала торсиона. После подстановки выражений (2.82) в (2.83) получаем

$$c = G \frac{l_{cx0} l_{cz0}^3 (1 + \gamma_x \Delta T) (1 + \gamma_z \Delta T)^3}{3l_{cy0} (1 + \gamma_y \Delta T)}. \quad (2.84)$$

Представим жесткость торсиона в виде

$$c \approx c_0(1 + \gamma_c \Delta T), \quad (2.85)$$

где c_0 - жесткость торсиона при начальной температуре, γ_c - коэффициент температурного изменения жесткости торсиона. Принимая коэффициенты температурного расширения малыми и, следовательно, пренебрегая элементами имеющими порядок малости выше первого, получаем следующие выражения коэффициентов формулы (2.85):

$$c_0 = G \frac{2I_{cx0} I_{cz0}^3}{3I_{cy0}}, \quad \gamma_c = \gamma_x + 3\gamma_z - \gamma_y. \quad (2.86)$$

С другой стороны, изменение температуры приведет не только к изменению жесткости торсионов чувствительного элемента, но и к изменению моментов инерции его конструкции. Следовательно, изменятся и коэффициенты, заданные соотношениями (2.46). Получим температурные зависимости для этих коэффициентов. Моменты инерции тел, входящих в состав чувствительного элемента микромеханического гироскопа, приближенно могут быть вычислены по следующим ниже формулам. Для наружной рамки:

$$\begin{aligned} I_{x1} &= \frac{M_1}{12} (l_{y1}^2 + l_{z1}^2) - \frac{M_0}{12} (l_{y0}^2 + l_{z0}^2), \\ I_{y1} &= \frac{M_1}{12} (l_{x1}^2 + l_{z1}^2) - \frac{M_0}{12} (l_{x0}^2 + l_{z0}^2), \\ I_{z1} &= \frac{M_1}{12} (l_{y1}^2 + l_{x1}^2) - \frac{M_0}{12} (l_{y0}^2 + l_{x0}^2), \end{aligned} \quad (2.87)$$

где M_1 - масса параллелепипеда, размеры которого l_{x1} , l_{y1} , l_{z1} совпадают с габаритами наружной рамки; M_0 - масса параллелепипеда с размерами l_{x0} , l_{y0} , l_{z0} , который “вырезан” из центра наружной рамки. Для внутренней рамки:

$$\begin{aligned} I_{x2} &= \frac{M_2}{12} (l_{y2}^2 + l_{z2}^2) + \frac{M_3}{12} (l_{y3}^2 + 4l_{z3}^2), \\ I_{y2} &= \frac{M_2}{12} (l_{x2}^2 + l_{z2}^2) + \frac{M_3}{12} (l_{x3}^2 + 4l_{z3}^2), \end{aligned} \quad (2.88)$$

$$I_{z2} = \frac{M_2}{12} (I_{y2}^2 + I_{x2}^2) + \frac{M_3}{12} (I_{y3}^2 + I_{x3}^2),$$

где M_2 - масса параллелепипеда, размеры которого l_{x2} , l_{y2} , l_{z2} совпадают с габаритами внутренней рамки; M_3 и l_{x3} , l_{y3} , l_{z3} - соответственно масса и размеры инерционной массы, находящейся на внутренней рамке.

Размеры рассматриваемых элементов конструкции микромеханического вибрационного гироскопа, за исключением инерционной массы, при линейном расширении будут определяться, как

$$l_{xi} = l_{xi0}(1 + \gamma_x \Delta T), \quad l_{yi} = l_{yi0}(1 + \gamma_y \Delta T), \quad l_{zi} = l_{zi0}(1 + \gamma_z \Delta T), \quad (2.89)$$

где $i = 0, 1, 2$. Размеры инерционной массы будут изменяться аналогично, но со своим коэффициентом температурного расширения γ_m :

$$l_{x3} = l_{x30}(1 + \gamma_m \Delta T), \quad l_{y3} = l_{y30}(1 + \gamma_m \Delta T), \quad l_{z3} = l_{z30}(1 + \gamma_m \Delta T). \quad (2.90)$$

Представим зависимость коэффициентов, заданных соотношениями (2.46), от температуры стандартным образом:

$$\begin{aligned} I_1 &\approx I_{10}(1 + \gamma_{I1} \Delta T), \quad I_2 \approx I_{20}(1 + \gamma_{I2} \Delta T), \\ G &\approx G_0(1 + \gamma_G \Delta T), \quad D_1 \approx D_{10}(1 + \gamma_{D1} \Delta T), \quad D_2 \approx D_{20}(1 + \gamma_{D2} \Delta T), \end{aligned} \quad (2.91)$$

где γ_{I1} , γ_{I2} , γ_G , γ_{D1} и γ_{D2} - соответствующие эквивалентные коэффициенты линейного температурного расширения. Используя соотношения (2.46), а также формулы (2.87) - (2.90), пренебрегая членами порядка малости выше первого, получаем выражения для эквивалентных коэффициентов температурного расширения:

$$\begin{aligned} \gamma_{I1} &= 2 \frac{M_2 (I_{y20}^2 \gamma_y + I_{z20}^2 \gamma_z) + M_3 (I_{y30}^2 + 4I_{z30}^2) \gamma_m}{M_2 (I_{y20}^2 + I_{z20}^2) + M_3 (I_{y30}^2 + I_{z30}^2)}, \\ \gamma_{I2} &= 2 \left(\gamma_x (M_1 I_{x10}^2 - M_0 I_{x00}^2 + M_2 I_{x20}^2) + \gamma_z (M_1 I_{z10}^2 - M_0 I_{z00}^2 + M_2 I_{z20}^2) + \right. \\ &+ M_3 (I_{x30}^2 + 4I_{z30}^2) \gamma_m \left. \right) / \left(M_1 (I_{x10}^2 + I_{x10}^2) - M_0 (I_{z00}^2 + I_{x00}^2) + M_2 (I_{z20}^2 + I_{x20}^2) + \right. \\ &+ M_3 (I_{x30}^2 + 4I_{z30}^2) \left. \right), \\ \gamma_G &= 2 \frac{M_2 I_{z20}^2 \gamma_z + 4M_3 I_{z30}^2 \gamma_m}{M_2 I_{z20}^2 + 4M_3 I_{z30}^2}, \end{aligned} \quad (2.92)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{D2} &= 2(\gamma_x(M_1 I_{x10}^2 - M_0 I_{x00}^2 + M_2 I_{x20}^2) - \gamma_z(M_1 I_{z10}^2 - M_0 I_{z00}^2 + M_2 I_{z20}^2) + \\ &+ M_3(I_{x30}^2 - 4I_{z30}^2)\gamma_m) / (M_1(I_{x10}^2 - I_{z10}^2) + M_0(I_{z00}^2 - I_{x00}^2) + M_2(I_{x20}^2 - I_{z20}^2) + \\ &+ M_3(I_{x30}^2 - 4I_{z30}^2)), \\ \gamma_{D1} &= 2 \frac{M_2(I_{y20}^2 \gamma_y - I_{z20}^2 \gamma_z) + M_3(I_{y30}^2 - 4I_{z30}^2)\gamma_m}{M_2(I_{y20}^2 - I_{z20}^2) + M_3(I_{y30}^2 - I_{z30}^2)}. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь изменение амплитуды угловых колебаний внутренней рамки чувствительного элемента, в зависимости от температурных изменений инерционных и упругих параметров системы. Коэффициенты системы (2.49) с точностью до первого порядка малости могут быть представлены, как

$$\begin{aligned} k_i^2 &\approx k_{i0}^2(1 + (\gamma_C - \gamma_{li})\Delta T), \quad d_i \approx d_{i0}(1 + (\gamma_{Di} - \gamma_{li})\Delta T), \\ g_i &\approx g_{i0}(1 + (\gamma_G - \gamma_{li})\Delta T), \end{aligned} \quad (2.93)$$

где $i=1,2$, а индексом 0 обозначены значения соответствующих коэффициентов при начальной температуре. С учетом (2.93) система дифференциальных уравнений (2.49), описывающая поведение чувствительного элемента, будет

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} + 2h_1 \dot{\alpha} + (k_{10}^2 + d_{10}\Omega^2)\alpha - g_{10}\Omega\dot{\beta} = \\ = -[k_{10}^2(\gamma_C - \gamma_{l1}) + d_{10}(\gamma_{D1} - \gamma_{l1})\Omega^2]\Delta T\alpha + g_{10}(\gamma_G - \gamma_{l1})\Delta T\Omega\dot{\beta}, \\ \ddot{\beta} + 2h_2 \dot{\beta} + (k_{20}^2 + d_{20}\Omega^2)\beta + g_{20}\Omega\dot{\alpha} = \\ = m_2(t) - [k_{20}^2(\gamma_C - \gamma_{l2}) + d_{20}(\gamma_{D2} - \gamma_{l2})\Omega^2]\Delta T\beta - g_{20}(\gamma_G - \gamma_{l2})\Delta T\Omega\dot{\alpha}. \end{cases} \quad (2.94)$$

Влиянием температурных изменений на колебания наружной рамки можно пренебречь по сравнению с моментом сил, создаваемых системой возбуждения, так как она колеблется вне своего резонанса. С другой стороны, влияние температурных изменений на колебания внутренней рамки можно считать величинами первого порядка малости и с достаточной степенью точности использовать асимптотические методы для нахождения решения, соответствующего температурной погрешности.

Воспользуемся методом последовательных приближений. Представим обобщенные координаты системы (2.94) в виде

$$\alpha \approx \alpha_0 + \varepsilon \alpha_1, \quad \beta \approx \beta_0, \quad (2.95)$$

где ε - фиктивный параметр, выражающий малость соответствующего слагаемого. Нулевое приближение приводит нас к системе дифференциальных уравнений, аналогичной системе (2.49):

$$\begin{cases} \ddot{\alpha}_0 + 2h_1\dot{\alpha}_0 + (k_{10}^2 + d_{10}\Omega^2)\alpha_0 - g_1\Omega\dot{\beta}_0 = 0, \\ \ddot{\beta}_0 + 2h_2\dot{\beta}_0 + (k_{20}^2 + d_{20}\Omega^2)\beta_0 + g_2\Omega\dot{\alpha}_0 = m_2(t). \end{cases} \quad (2.96)$$

Решение системы уравнений (2.96) представим в виде

$$\begin{aligned} \alpha_0(t) &= \operatorname{Re}\{\bar{A}_0 e^{i\omega t}\}, \quad \bar{A}_0 = A_0 e^{i\varphi_{10}}, \\ \beta_0(t) &= \operatorname{Re}\{\bar{B}_0 e^{i\omega t}\}, \quad \bar{B}_0 = B_0 e^{i\varphi_{20}}, \end{aligned} \quad (2.97)$$

где комплексные амплитуды \bar{A}_0 и \bar{B}_0 могут быть вычислены по формулам (2.54). Составляющую угла отклонения внутренней рамки, соответствующую первому приближению, находим из уравнения

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha}_1 + 2h_1\dot{\alpha}_1 + (k_{10}^2 + d_{10}\Omega^2)\alpha_1 &= \\ = -[k_{10}^2(\gamma_C - \gamma_{I1}) + d_{10}(\gamma_{D1} - \gamma_{I1})\Omega^2] \Delta T \alpha_0 + g_{10}(\gamma_G - \gamma_{I1}) \Delta T \Omega \dot{\beta}_0. \end{aligned} \quad (2.98)$$

Решение уравнения (2.98) будем искать в виде $\alpha_1(t) = \operatorname{Re}\{\bar{A}_1 e^{i\omega t}\}$, $\bar{A}_1 = A_1 e^{i\varphi_{11}}$. После перехода от комплексной амплитуды к действительной получаем амплитуду колебаний, пропорциональную изменению температуры:

$$\begin{aligned} A_1 = A_T &= \frac{k_{10}^2(\gamma_C - \gamma_{I1}) + d_{10}(\gamma_{D1} - \gamma_{I1})\Omega^2}{\sqrt{(k_{10}^2 + d_{10}\Omega^2 - \omega^2)^2 + 4h_1^2\omega^2}} \Delta T A_0 + \\ &+ \frac{g_{10}(\gamma_G - \gamma_{I1})\omega\Omega}{\sqrt{(k_{10}^2 + d_{10}\Omega^2 - \omega^2)^2 + 4h_1^2\omega^2}} \Delta T B_0, \end{aligned} \quad (2.99)$$

где

$$\begin{aligned} A_0 &= g_{10}m_2\omega\Omega / \sqrt{\Delta_0^2}, \\ B_0 &= m_2 \sqrt{[(k_{10}^2 + d_{10}\Omega^2 - \omega^2)^2 + 4h_1^2\omega^2]} / \Delta_0^2, \end{aligned}$$

$$\Delta_0^2 = \left[(k_{10}^2 + d_{10}\Omega^2 - \omega^2)(k_{20}^2 + d_{20}\Omega^2 - \omega^2) - (4h_1h_2 + g_{10}g_{20}\Omega^2)\omega^2 \right]^2 + 4\omega^2 \left[h_1(k_{20}^2 + d_{20}\Omega^2 - \omega^2) + h_2(k_{10}^2 + d_{10}\Omega^2 - \omega^2) \right]^2.$$

Линейная зависимость амплитуды колебаний внутренней рамки A_T , обусловленной температурными изменениями, от амплитуды невозмущенных колебаний позволяет представить амплитуду результирующих колебаний A в виде:

$$A = A_0(1 + \gamma_T \Delta T), \quad (2.100)$$

где γ_T - коэффициент температурной погрешности, который может быть посчитан по формуле

$$\gamma_T = \frac{k_{10}^2(\gamma_C - \gamma_{I1}) + d_{10}(\gamma_{D1} - \gamma_{I1})\Omega^2}{\sqrt{(k_{10}^2 + d_{10}\Omega^2 - \omega^2)^2 + 4h_1^2\omega^2}} + \gamma_G - \gamma_{I1}. \quad (2.101)$$

Полученные зависимости (2.100) и (2.101) позволяют оценить воздействие изменений температуры на амплитуду информативных выходных колебаний внутренней рамки чувствительного элемента кардановой схемы микромеханического вибрационного гироскопа.

2.2.4. Выводы

Анализ динамики и погрешностей карданового микромеханического гироскопа показал, что амплитуда угловых колебаний рамок пропорциональна угловой скорости вращения основания. Возбуждение входных колебаний чувствительного элемента на их собственной частоте приводит к увеличению амплитуды регистрируемых колебаний. Амплитуда регистрируемых колебаний внутренней рамки, полученная для экспериментального образца карданового микромеханического гироскопа, линейно зависит от угловой скорости вращения основания в достаточно широком диапазоне. К достоинствам кардановой схемы чувствительного элемента можно отнести практическую нечувствительность ее точности к поступательным ускорениям и вибрации. Однако, использование угловых

колебаний чувствительного элемента для измерения угловой скорости накладывает существенные ограничения на степень миниатюризации датчика. Это объясняется тем, что так же, как и в камертонном гироскопе, емкостная система регистрации выходных колебаний измеряет поступательные перемещения обкладок конденсаторов, расположенных на рамках чувствительного элемента. Поэтому, с уменьшением линейных размеров чувствительного элемента будет уменьшаться плечо, которое формирует поступательные перемещения при вращении чувствительного элемента. Кроме этого, наличие на внутренней рамке инерционной массы приводит к усложнению технологии изготовления чувствительного элемента.

2.3. Выводы по главе

Рассмотрение динамики и погрешностей камертонного и карданового микромеханических гироскопов позволяет сделать следующие выводы:

- для повышения чувствительности датчиков всех рассмотренных схем необходимо реализовывать возбуждение на собственной частоте первичных колебаний чувствительного элемента;
- для малых переносных угловых скоростей вращения основания амплитуда колебаний чувствительного элемента пропорциональна этой угловой скорости;
- собственные частоты чувствительного элемента зависят от угловой скорости вращения основания. Эта зависимость достаточно точно аппроксимируется линейной функцией для равных парциальных частот и квадратичной функцией в остальных случаях;
- устойчивые колебания чувствительных элементов рассмотренных схем происходят при значениях угловой скорости, меньших парциальной частоты первичных колебаний по абсолютной величине;
- чувствительность камертонного вибрационного гироскопа к поступательной вибрации значительно уменьшается при выборе рабочей частоты, равной собственной частоте первичных колебаний;
- использование в чувствительных элементах микромеханических гироскопов угловых перемещений снижает уровень дальнейшей миниатюризации датчика при емкостной регистрации выходных колебаний, но снижает его чувствительность к поступательным ускорениям и вибрациям;
- действие силы возбуждения непосредственно на инерционный элемент, колебания которого являются информативными, приводит к появлению в выходном сигнале датчика колебаний, которые пропорциональны силе

возбуждения, а не угловой скорости. Такая погрешность обусловлена неидеальным изготовлением упругих элементов подвеса;

- возможность датчика измерять медленно меняющиеся угловые скорости ограничивается шириной полосы пропускания чувствительного элемента. Уменьшить динамическую погрешность при измерении гармонической угловой скорости можно при помощи разнесения собственных частот чувствительного элемента, и этот способ рассматривается далее.

В силу приведенных выше достоинств и недостатков рассмотренных ранее камертонной и кардановой схем чувствительных элементов микромеханических вибрационных гироскопов, можно сделать вывод о целесообразности и перспективности дальнейшего исследования одномассовых гироскопов с поступательными первичными и вторичными колебаниями чувствительного элемента.

Математическая модель одномассового микромеханического вибрационного гироскопа в этом разделе не приводится, так как она является частным случаем более общей модели гироскопа с дополнительной рамкой. Она может быть легко из нее получена, если положить массу рамки равной нулю.

3. АНАЛИЗ ДИНАМИКИ ВИБРАЦИОННОГО ГИРОСКОПА С ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ РАМКОЙ

3.1. Базовая математическая модель

3.1.1. Кинематическая схема и уравнения движения чувствительного элемента

Для составления уравнений движения чувствительного элемента вибрационного микромеханического гироскопа с дополнительной рамкой воспользуемся уравнениями Лагранжа 2-го рода. Введем правую прямоугольную декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$ с началом, совпадающим с центром масс инерционной массы в состоянии покоя. Ось x_1 направим вдоль направления информативных колебаний инерционной массы (рис. 3.1).

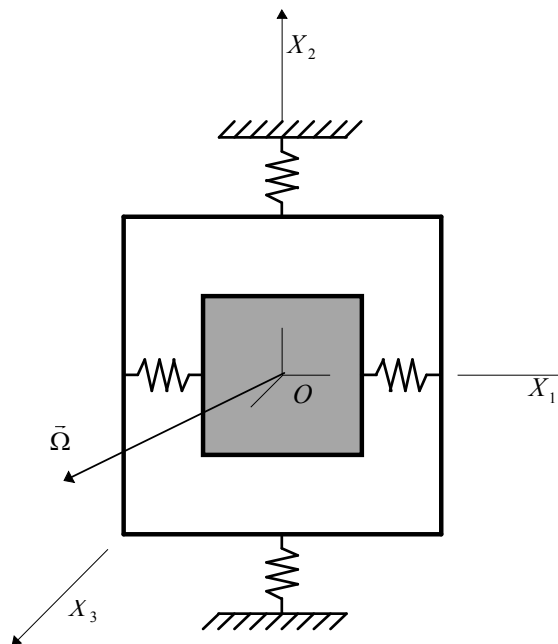


Рис. 3.1. Кинематическая схема чувствительного элемента

Ось x_2 направим по направлению возбуждаемых колебаний чувствительного элемента. Следовательно ось x_3 будет направлена

перпендикулярно плоскости чувствительного элемента. В качестве обобщенной координаты x_2 выберем смещение рамки вместе с инерционной массой от состояния равновесия вдоль оси X_2 (первичные колебания). Смещение инерционной массы относительно рамки в направлении оси X_1 обозначим x_1 (вторичные колебания). В дальнейшем нижний индекс 1 будет обозначать переменные, относящиеся к инерционной массе, а 2 - к рамке чувствительного элемента. Основание, на котором установлен чувствительный элемент, вращается с произвольной переносной угловой скоростью $\vec{\Omega}$, заданной своими проекциями на оси выбранной системы координат $OX_1X_2X_3$ в виде $\vec{\Omega} = \{\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3\}$. Положение центра масс рамки чувствительного элемента в нашей системе координат будет определяться вектором $\vec{r}_2 = \{0, x_2, 0\}$, а инерционной массы вектором $\vec{r}_1 = \{x_1, x_2, 0\}$. Запишем выражение для абсолютной скорости каждого тела рассматриваемой системы - рамки и инерционной массы. Складывая относительную и переносную скорости получаем

$$\vec{V}_1 = \{\dot{x}_1 - x_2\Omega_3, \dot{x}_2 + x_1\Omega_3, x_2\Omega_1 - x_1\Omega_2\}, \quad \vec{V}_2 = \{-x_2\Omega_3, \dot{x}_2, x_2\Omega_1\}, \quad (3.1)$$

где \vec{V}_1 - вектор абсолютной скорости инерционной массы, а \vec{V}_2 - вектор абсолютной скорости рамки чувствительного элемента. С учетом (3.1), формулы для кинетической энергии каждого из тел системы будут

$$T_1 = \frac{m_1}{2} \vec{V}_1^2 = \frac{m_1}{2} [(\dot{x}_1 - x_2\Omega_3)^2 + (\dot{x}_2 + x_1\Omega_3)^2 + (x_2\Omega_1 - x_1\Omega_2)^2], \quad (3.2)$$

$$T_2 = \frac{m_2}{2} \vec{V}_2^2 = \frac{m_2}{2} [x_2^2\Omega_3^2 + \dot{x}_2^2 + x_2^2\Omega_1^2],$$

где m_1 и m_2 - массы инерционной массы и рамки соответственно. Общая кинетическая энергия системы запишется как

$$T = T_1 + T_2. \quad (3.3)$$

Запишем теперь выражение для потенциальной энергии чувствительного элемента. Обозначим через c_1 суммарную жесткость элементов упругого подвеса в направлении оси X_1 , а через c_2 - суммарную

жесткость в направлении оси X_2 . Тогда общая потенциальная энергия деформации упругого подвеса будет определяться выражением

$$P = \frac{c_1}{2} x_1^2 + \frac{c_2}{2} x_2^2. \quad (3.4)$$

Для механической системы с двумя степенями свободы уравнения Лагранжа 2-го рода имеют следующий вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = Q_i, \quad (i=1,2), \quad (3.5)$$

$L = T - P$ - функция Лагранжа; Q_i - обобщенные силы. Подставляя выражения для кинетической энергии (3.2)-(3.3) и выражения для потенциальной энергии (3.4) в уравнения (3.5), проводя необходимое дифференцирование и приведение подобных слагаемых и разделив обе части каждого из уравнений на коэффициенты при старших производных, получаем систему дифференциальных уравнений, описывающих движение чувствительного элемента на вращающемся основании, которая имеет вид:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + (k_1^2 - \Omega_2^2 - \Omega_3^2)x_1 - 2\Omega_3\dot{x}_2 + (\Omega_1\Omega_2 - \dot{\Omega}_3)x_2 = q_1, \\ \ddot{x}_2 + (k_2^2 - \Omega_1^2 - \Omega_3^2)x_2 + 2d\Omega_3\dot{x}_1 + d(\Omega_1\Omega_2 + \dot{\Omega}_3)x_1 = q_2, \end{cases} \quad (3.6)$$

где $k_1^2 = c_1/m_1$ и $k_2^2 = c_2/(m_1 + m_2)$ - парциальные частоты вторичных и первичных колебаний; $d = m_1/(m_1 + m_2)$ - безразмерный коэффициент инерционной асимметрии; $q_1 = Q_1/m_1$, $q_2 = Q_2/(m_1 + m_2)$ - обобщенные ускорения от сил, действующих в направлении соответствующих координат. Дополняя полученную систему уравнений (3.6) силами демпфирования получаем

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2h_1\dot{x}_1 + (k_1^2 - \Omega_2^2 - \Omega_3^2)x_1 - 2\Omega_3\dot{x}_2 + (\Omega_1\Omega_2 - \dot{\Omega}_3)x_2 = q_1, \\ \ddot{x}_2 + 2h_2\dot{x}_2 + (k_2^2 - \Omega_1^2 - \Omega_3^2)x_2 + 2d\Omega_3\dot{x}_1 + d(\Omega_1\Omega_2 + \dot{\Omega}_3)x_1 = q_2, \end{cases} \quad (3.7)$$

где h_1 и h_2 - коэффициенты демпфирования, соответствующие движению чувствительного элемента в направлении координат x_1 и x_2 . Из анализа полученной системы дифференциальных уравнений видно, что движения тел системы в направлении выбранных обобщенных координат при

идеальном упругом подвесе связаны между собой только членами, зависящими от измеряемой переносной угловой скорости. Это означает, что в отсутствии внешних сил, действующих на инерционную массу в направлении обобщенной координаты x_1 , вынужденное движение инерционной массы будет определяться только переносной угловой скоростью. Характерной особенностью рассматриваемых уравнений движения чувствительного элемента вибрационного гироскопа является то, что измеряемая переносная угловая скорость входит в них в качестве параметра. Это приводит к тому что для произвольной угловой скорости мы получаем систему линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Нахождение точных аналитических решений такой системы является затруднительным.

Примем, что проекции вектора переносной угловой скорости $\vec{\Omega}$ на оси системы координат $OX_1X_2X_3$ являются медленно меняющимися функциями времени или квазипостоянными. В этом случае мы можем перейти к системе дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, которая имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2h_1\dot{x}_1 + (k_1^2 - \Omega_2^2 - \Omega_3^2)x_1 - 2\Omega_3\dot{x}_2 + \Omega_1\Omega_2x_2 = q_1, \\ \ddot{x}_2 + 2h_2\dot{x}_2 + (k_2^2 - \Omega_1^2 - \Omega_3^2)x_2 + 2d\Omega_3\dot{x}_1 + d\Omega_1\Omega_2x_1 = q_2. \end{cases} \quad (3.8)$$

Решение системы (3.8) точно описывает движение чувствительного элемента только для постоянной угловой скорости. Все компоненты вектора угловой скорости $\vec{\Omega}$ за исключением Ω_3 входят в уравнения движения нелинейно. Это свидетельствует о том, что линейное измерение угловой скорости возможно только в случае, когда вектор $\vec{\Omega}$ перпендикулярен плоскости чувствительного элемента. Пусть $\vec{\Omega} = \{0, 0, \Omega\}$. Тогда система уравнений (3.7) преобразуется к виду

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2h_1\dot{x}_1 + (k_1^2 - \Omega^2)x_1 - 2\Omega\dot{x}_2 - \dot{\Omega}x_2 = q_1, \\ \ddot{x}_2 + 2h_2\dot{x}_2 + (k_2^2 - \Omega^2)x_2 + 2d\Omega\dot{x}_1 + d\dot{\Omega}x_1 = q_2, \end{cases} \quad (3.9)$$

или для постоянной угловой скорости $\Omega = const$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2h_1\dot{x}_1 + (k_1^2 - \Omega^2)x_1 - 2\Omega\dot{x}_2 = q_1, \\ \ddot{x}_2 + 2h_2\dot{x}_2 + (k_2^2 - \Omega^2)x_2 + 2d\Omega\dot{x}_1 = q_2. \end{cases} \quad (3.10)$$

В системы уравнений (3.9) и (3.10) измеряемая переносная угловая скорость входит как в первой степени, так и во второй. Перейти к системе, решение которой будет описывать движение инерционной массы, определяемое только первой степенью переносной угловой скорости, мы можем лишь для малой угловой скорости, когда квадрат угловой скорости мал по сравнению с квадратом парциальной круговой частоты, и преобразовать систему уравнений (3.10) к виду

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2h_1\dot{x}_1 + k_1^2x_1 - 2\Omega\dot{x}_2 = 0, \\ \ddot{x}_2 + 2h_2\dot{x}_2 + k_2^2x_2 + 2d\Omega\dot{x}_1 = q_2. \end{cases} \quad (3.11)$$

В системе (3.11) принято, что дополнительные силы, кроме Кориолисовых и сил системы возбуждения, на чувствительный элемент не действуют.

3.1.2. Движение чувствительного элемента на неподвижном основании

Рассмотрим поведение чувствительного элемента микромеханического вибрационного гироскопа с рамкой на неподвижном основании. В этом случае переносная угловая скорость $\Omega = 0$ и система дифференциальных уравнений движения (3.11) преобразуется к виду

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2h_1\dot{x}_1 + k_1^2x_1 = 0, \\ \ddot{x}_2 + 2h_2\dot{x}_2 + k_2^2x_2 = q_2(t). \end{cases} \quad (3.12)$$

Система дифференциальных уравнений движения чувствительного элемента распадается на два независимых линейных дифференциальных уравнения второго порядка относительно обобщенных координат. При гармоническом возбуждении колебаний рамки с частотой ω и фазой σ , выражение для силы, создаваемого системой возбуждения, принимает следующий вид:

$$q_2(t) = q_2 \sin(\omega t + \sigma). \quad (3.13)$$

Общим решением совокупности уравнений (3.12) будут следующие зависимости обобщенных координат от времени

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 0, \\ x_2(t) &= A_2 e^{-h_2 t} \sin\left(t\sqrt{k_2^2 - h_2^2} + \varphi_2\right) + \frac{q_2}{\sqrt{(k_2^2 - \omega^2)^2 + 4h_2^2\omega^2}} \sin(\omega t + \gamma), \end{aligned} \quad (3.14)$$

где постоянные коэффициенты A_2 и φ_2 определяются из начальных условий, а фаза вынужденных колебаний γ определяется из соотношения

$$\operatorname{tg}(\sigma - \gamma) = 2h_2\omega / (k_2^2 - \omega^2). \quad (3.15)$$

Анализируя полученные решения (3.14) видим, что рамка чувствительного элемента вместе с инерционной массой совершают вынужденные колебания с амплитудой, пропорциональной силе возбуждения (после затухания собственных колебаний) вдоль оси X_2 , в то время как по направлению оси X_1 инерционная масса остается неподвижной, и выходной сигнал будет равен нулю.

3.1.3. Движение чувствительного элемента на вращающемся основании

Изучим теперь поведение чувствительного элемента вибрационного гироскопа с рамкой на вращающемся с постоянной угловой скоростью основании. Не ограничивая общности задачи мы будем полагать, что вектор квазипостоянной переносной угловой скорости ориентирован вдоль оси X_3 , то есть $\vec{\Omega} = \{0, 0, \Omega\}$. Движение чувствительного элемента будет описываться в этом случае системой дифференциальных уравнений (3.10), в которой $q_1(t) = 0$. В отличие от совокупности дифференциальных уравнений (3.12), здесь уравнения образуют систему уравнений связанных между собой посредством гироскопических членов, пропорциональных измеряемой угловой скорости. Решение системы дифференциальных уравнений (3.10), соответствующее собственным колебаниям

чувствительного элемента очевидно и не представляет интереса с точки зрения использования параметров колебаний для измерения переносной угловой скорости, так как они со временем затухают. При гармоническом возбуждении первичных колебаний с круговой частотой ω и нулевой фазой сила, действующая на нее, может быть задана в виде $q_2(t) = \text{Re}\{q_2 e^{i\omega t}\}$. Колебания рамки и инерционной массы, соответствующие частному решению системы неоднородных дифференциальных уравнений (3.10), будем искать в виде

$$x_1(t) = \text{Re}\{\bar{A}_1 e^{i\omega t}\}, \quad \bar{A}_1 = A_1 e^{i\varphi_1}, \quad x_2(t) = \text{Re}\{\bar{A}_2 e^{i\omega t}\}, \quad \bar{A}_2 = A_2 e^{i\varphi_2}, \quad (3.16)$$

где A_1 и A_2 - амплитуды поступательных вторичных и первичных колебаний соответственно, а φ_1 и φ_2 - их фазы. После подстановки выражений (3.16) для искомых смещений инерционной массы и рамки в систему (3.10), получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно комплексных амплитуд \bar{A}_1 и \bar{A}_2

$$\begin{cases} (k_1^2 - \Omega^2 - \omega^2 + 2h_1 i\omega)\bar{A}_1 - 2\Omega i\omega\bar{A}_2 = 0, \\ 2d\Omega i\omega\bar{A}_1 + (k_2^2 - \Omega^2 - \omega^2 + 2h_2 i\omega)\bar{A}_2 = q_2. \end{cases} \quad (3.17)$$

Главный определитель этой системы записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}(\omega, \Omega^2) &= (k_1^2 - \Omega^2 - \omega^2)(k_2^2 - \Omega^2 - \omega^2) - 4\omega^2(h_1 h_2 + d\Omega^2) + \\ &+ 2i\omega[h_1(k_2^2 - \Omega^2 - \omega^2) + h_2(k_1^2 - \Omega^2 - \omega^2)]. \end{aligned}$$

Решение системы (3.17) по методу Крамера относительно комплексных амплитуд будет

$$\bar{A}_1 = \frac{2q_2 i\omega}{\bar{\Delta}(\omega, \Omega^2)} \Omega, \quad \bar{A}_2 = \frac{q_2(k_1^2 - \Omega^2 - \omega^2 + 2h_1 i\omega)}{\bar{\Delta}(\omega, \Omega^2)}. \quad (3.18)$$

Применение метода комплексных амплитуд (одна из версий метода усреднения в применении к колебательным системам) позволяет уйти от анализа перемещений, а проводить анализ движения чувствительного элемента вибрационного гироскопа сразу в интересующих нас параметрах - амплитуде и фазе. Из анализа выражений (3.18) видно, что обеспечив на

входе системы возбуждение первичных колебаний рамки и инерционной массы, на выходе мы получаем вторичные колебания инерционной массы, пропорциональные измеряемой переносной угловой скорости. Поэтому, для определения зависимости параметров линейных колебаний инерционной массы от переносной угловой скорости найдем выражения для амплитуды и фазы этих колебаний. Переход от комплексных амплитуд к действительным амплитудам и фазам можем осуществить на основании выражений (3.16) следующим образом:

$$A = |\bar{A}| = \sqrt{\operatorname{Re}(\bar{A})^2 + \operatorname{Im}(\bar{A})^2}, \quad \operatorname{tg}(\varphi) = \frac{\operatorname{Im}(\bar{A})}{\operatorname{Re}(\bar{A})}. \quad (3.19)$$

Этот переход дает следующие выражения для амплитуд колебаний инерционной массы и рамки:

$$A_1 = \frac{2q_2\omega}{\Delta}\Omega, \quad A_2 = \frac{q_2\sqrt{(k_1^2 - \Omega^2 - \omega^2)^2 + 4h_1^2\omega^2}}{\Delta}, \quad (3.20)$$

$$\Delta^2 = \left[(k_1^2 - \Omega^2 - \omega^2)(k_2^2 - \Omega^2 - \omega^2) - 4\omega^2(h_1h_2 + d\Omega^2) \right]^2 + 4\omega^2 \left[h_1(k_2^2 - \Omega^2 - \omega^2) + h_2(k_1^2 - \Omega^2 - \omega^2) \right]^2$$

и их фаз:

$$\operatorname{tg}(\varphi_1) = \frac{(k_1^2 - \Omega^2 - \omega^2)(k_2^2 - \Omega^2 - \omega^2) - 4(h_1h_2 + d\Omega^2)\omega^2}{2\omega[h_1(k_2^2 - \Omega^2 - \omega^2) + h_2(k_1^2 - \Omega^2 - \omega^2)]}, \quad (3.21)$$

$$\operatorname{tg}(\varphi_2) = \frac{b_1 + b_2}{b_3 - b_4},$$

$$b_1 = 2\omega(k_1^2 - \Omega^2 - \omega^2)[h_1(k_2^2 - \Omega^2 - \omega^2) + h_2(k_1^2 - \Omega^2 - \omega^2)],$$

$$b_2 = 2\omega h_1[(k_1^2 - \Omega^2 - \omega^2)(k_2^2 - \Omega^2 - \omega^2) - 4\omega^2(h_1h_2 + d\Omega^2)],$$

$$b_3 = (k_1^2 - \Omega^2 - \omega^2)[(k_1^2 - \Omega^2 - \omega^2)(k_2^2 - \Omega^2 - \omega^2) - 4\omega^2(h_1h_2 + d\Omega^2)],$$

$$b_4 = 4h_1\omega^2[h_1(k_2^2 - \Omega^2 - \omega^2) + h_2(k_1^2 - \Omega^2 - \omega^2)].$$

Полученные выражения позволяют анализировать зависимость амплитуды и фазы первичных и вторичных колебаний от измеряемой переносной угловой скорости. График зависимости амплитуды от угловой скорости

при частоте возбуждения, равной парциальной частоте первичных колебаний, представлен на рис. 3.2.

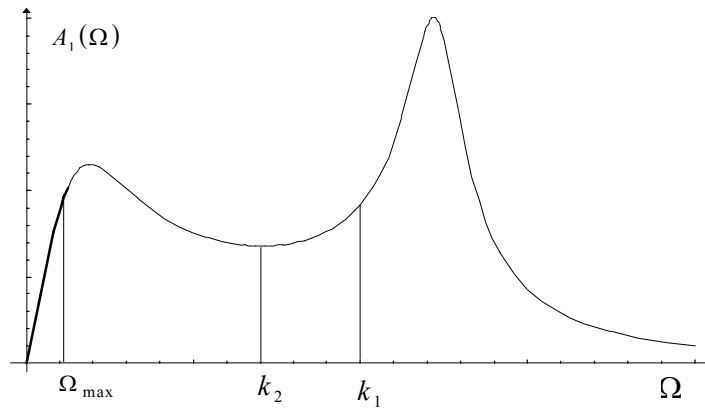


Рис. 3.2. Зависимость амплитуды колебаний инерционной массы от переносной угловой скорости

Величины амплитуд выходных колебаний, полученные экспериментально, приведены на рис. 3.3, а соответствующие им результаты численного моделирования на рис. 3.4. Характеристики прибора приведены в таблице 1.

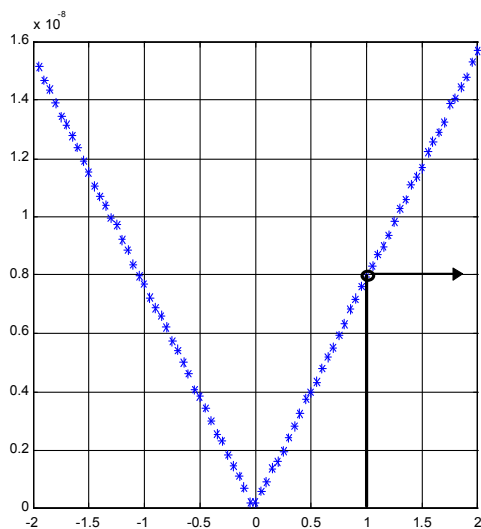


Рис. 3.3. Экспериментальные данные

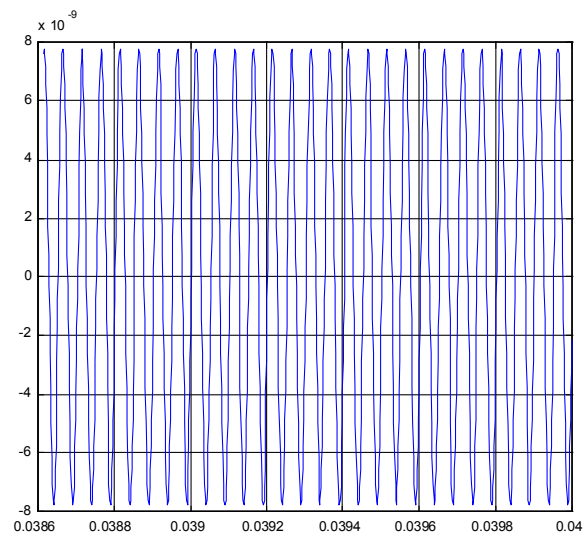


Рис. 3.4. Вторичные колебания во времени при $\Omega = 1 \text{ c}^{-1}$

Таблица 1. Основные параметры микромеханического гироскопа

Рабочая частота, Гц	20000
Отношение парциальных частот	1,01
Ширина полосы пропускания по угловой скорости, Гц	43,2

Габаритные размеры чувствительного элемента, мкм	375×275×20
Масса чувствительного элемента, 10 ⁻⁹ кг	1,4

Из анализа графика на рис. 3.2 следует, что линейное измерение переносной угловой скорости возможно только для угловых скоростей, которые малы по сравнению со значением нижней парциальной частоты. На практике, ширины линейного участка достаточно для обеспечения необходимого диапазона измерения (см. рис. 3.3). Если принять, что рабочая частота равна парциальной частоте первичных колебаний, то для малой угловой скорости выражения для амплитуд и фаз можно упростить

$$A_1 \approx \frac{q_2}{h_2 \sqrt{(k_2^2 - k_1^2)^2 + 4h_1^2 k_2^2}} \Omega, \quad A_2 \approx \frac{q_2}{2k_2 h_2}, \quad (3.22)$$

$$\operatorname{tg}(\varphi_1) \approx 2h_1 k_2 / (k_2^2 - k_1^2), \quad \varphi_2 \approx \pi/2. \quad (3.23)$$

Из анализа выражений (3.22) видно, что измерения амплитуды вторичных колебаний чувствительного элемента вибрационного гироскопа с дополнительной рамкой позволяют проводить измерения угловой скорости вращения основания, которая перпендикулярна плоскости колебаний инерционной массы.

3.1.4. Устойчивость колебаний чувствительного элемента

Исследуем устойчивость колебаний чувствительного элемента микромеханического вибрационного гироскопа с дополнительной рамкой. Используя оператор дифференцирования p , система уравнения (3.10) может быть записана следующим образом:

$$\begin{cases} (p^2 + 2h_1 p + k_1^2 - \Omega^2) X_1(p) - 2\Omega p X_2(p) = 0, \\ 2d\Omega p X_1(p) + (p^2 + 2h_2 p + k_2^2 - \Omega^2) X_2(p) = Q_2(p). \end{cases} \quad (3.24)$$

Характеристическое уравнение для системы (3.24) будет

$$\Delta(p) = p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0, \quad (3.25)$$

$$a_3 = 2(h_1 + h_2), \quad a_2 = 4h_1h_2 + k_1^2 + k_2^2 + 2(2d-1)\Omega^2,$$

$$a_1 = 2[h_1(k_2^2 - \Omega^2) + h_2(k_1^2 - \Omega^2)], \quad a_0 = k_1^2k_2^2 - (k_1^2 + k_2^2)\Omega^2 + \Omega^4.$$

Условия устойчивости колебаний чувствительного элемента, полученные по алгебраическому критерию Рауса-Гурвица, запишутся как

$$a_1a_2a_3 - a_1^2 - a_3^2a_0 > 0, \quad a_i > 0, \quad i = 0...3. \quad (3.26)$$

Коэффициенты характеристического уравнения (3.25) зависят от парциальных частот системы, коэффициентов демпфирования и переносной угловой скорости. Неизвестной априори является только угловая скорость. Все остальные параметры системы могут быть выбраны заранее, исходя из условий устойчивости (3.26). Из структуры коэффициентов характеристического уравнения видно, что отрицательными могут стать коэффициенты a_1 и a_0 . Кроме этого, нарушение условия устойчивости возможно и в первом выражении (3.26). Найдем значения угловой скорости, которые соответствуют колебаниям чувствительного элемента на границе устойчивости из уравнений

$$a_0 = k_1^2k_2^2 - (k_1^2 + k_2^2)\Omega^2 + \Omega^4 = 0, \quad (3.27)$$

$$a_1 = 2[h_1(k_2^2 - \Omega^2) + h_2(k_1^2 - \Omega^2)] = 0,$$

$$a_1a_2a_3 - a_1^2 - a_3^2a_0 = 0.$$

Решения первого уравнения из (3.27) относительно переносной угловой скорости определяются по формулам

$$\Omega_{1,2}^{(0)} = \pm k_1, \quad \Omega_{3,4}^{(0)} = \pm k_2. \quad (3.28)$$

Решения второго уравнения из (3.27) будут

$$\Omega_{1,2}^{(1)} = \pm \sqrt{\frac{h_2k_1^2 + h_1k_2^2}{h_1 + h_2}}. \quad (3.29)$$

Диапазон положительности коэффициентов a_0 и a_1 можем определить по графику на рис. 3.5 и рис.3.6.

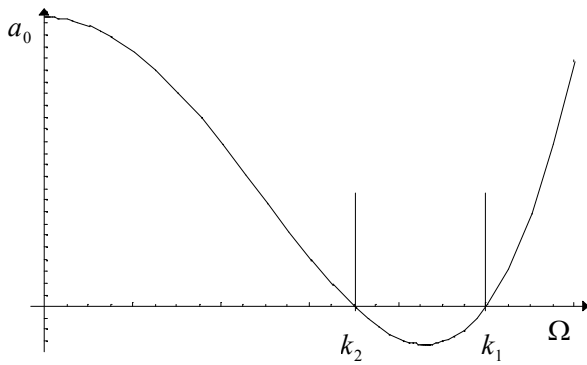


Рис. 3.5. Зависимость коэффициента a_0 от переносной угловой скорости

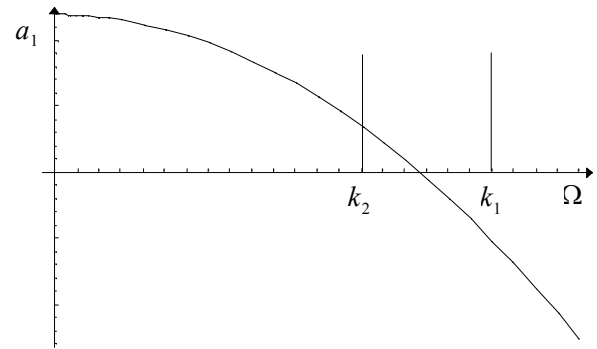


Рис. 3.6. Зависимость коэффициента a_1 от переносной угловой скорости

Выражения для решений третьего уравнения из (3.27) достаточно громоздки и не представляют интереса, так как по абсолютной величине они больше решений первых двух уравнений. Из анализа выражений (3.28), (3.29) и графиков на рисунках 3.5 и 3.6 следует, что колебания чувствительного элемента устойчивы для угловых скоростей в диапазоне

$$-k_2 < \Omega < k_2. \quad (3.30)$$

Таким образом, устойчивые колебания чувствительного элемента существуют только для угловых скоростей, которые по абсолютной величине меньше парциальной частоты первичных колебаний. Соотношения (3.30) должны учитываться при проектировании прибора, исходя из рабочих значений угловой скорости в месте установки датчика.

3.1.5. Собственные частоты чувствительного элемента гироскопа

Найдем собственные частоты колебаний чувствительного элемента. Они будут определяться корнями характеристического уравнения (3.25). Корни уравнения (3.25) могут быть найдены приближенно. Если принять

вязкое трение отсутствующим, то $a_1 = a_3 = 0$ и характеристическое уравнение может быть решено как биквадратное

$$p^4 + b_1 p^2 + b_0 = 0, \quad (3.31)$$

$$b_1 = k_1^2 + k_2^2 + 2(2d-1)\Omega^2,$$

$$b_0 = (k_1^2 - \Omega^2)(k_2^2 - \Omega^2) = k_1^2 k_2^2 - (k_1^2 + k_2^2)\Omega^2 + \Omega^4.$$

Корни уравнения (3.31) соотносятся с собственными частотами ω_{j0} первичных и вторичных колебаний следующим образом:

$$p_{1,2} = \pm i\omega_{10}, \quad p_{3,4} = \pm i\omega_{20}. \quad (3.32)$$

Решая уравнение (3.31) с учетом соотношений (3.32) можем записать выражения для квадратов собственных частот

$$\omega_{j0}^2 = \frac{1}{2} [k_1^2 + k_2^2 + 2(2d-1)\Omega^2] - \quad (3.33)$$

$$- \frac{(-1)^j}{2} \sqrt{[k_1^2 + k_2^2 + 2(2d-1)\Omega^2]^2 - 4(k_1^2 - \Omega^2)(k_2^2 - \Omega^2)},$$

$$j = 1, 2; \quad \omega_{10} > \omega_{20}.$$

Качественный график зависимости j -той частоты от измеряемой угловой скорости, которая мала по сравнению с парциальными частотами, представлен на рис. 3.7. Теперь найдем выражения для собственных частот колебаний чувствительного элемента микромеханического вибрационного гироскопа с учетом вязкого трения, учитывая его малость. Представим уравнение (3.25) в виде

$$\Delta(p) = (p^2 + 2h_{10} + \omega_1^2)(p^2 + 2h_{20} + \omega_2^2). \quad (3.34)$$

где ω_j - собственные частоты при малом демпфировании; h_{j0} - коэффициенты демпфирования. Раскрывая скобки и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях оператора дифференцирования p в выражениях (3.25) и (3.34), получим систему четырех алгебраических уравнений для определения ω_1 , ω_2 , h_{10} и h_{20} .

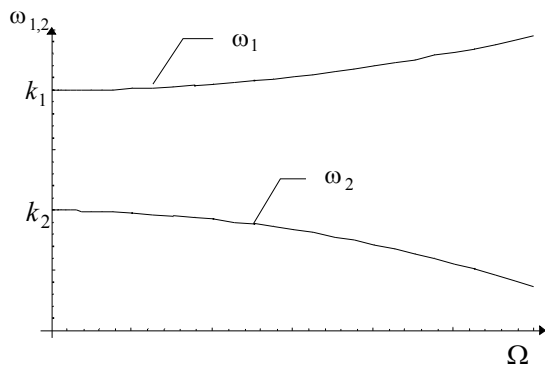


Рис. 3.7. Зависимость собственных частот от переносной угловой скорости.

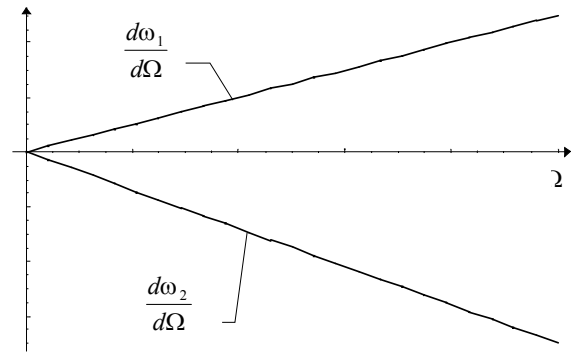


Рис. 3.8. Первые производные собственных частот, как функции угловой скорости

С учетом малости коэффициентов вязкого трения можем найти следующие значения для корней уравнения (3.34):

$$p_{1,2} = -h_{10} \pm i\omega_1; \quad p_{3,4} = -h_{20} \pm i\omega_2, \quad (3.35)$$

$$\text{где } h_{10} = \frac{a_3\omega_{10}^2 - a_1}{2(\omega_{10}^2 - \omega_{20}^2)}; \quad h_{20} = \frac{a_1 - a_3\omega_{20}^2}{2(\omega_{10}^2 - \omega_{20}^2)}; \quad \omega_1 \approx \omega_{10}; \quad \omega_2 \approx \omega_{20}.$$

Формула (3.33) достаточно громоздка. Она может быть несколько упрощена при помощи разложения квадратного корня в ряд Макларена. Удержание двух первых элементов этого разложения в выражениях (3.33) приводят к следующим зависимостям:

$$\omega_{20}^2 \approx \frac{b_0}{b_1} = \frac{(k_1^2 - \Omega^2)(k_2^2 - \Omega^2)}{k_1^2 + k_2^2 + 2(2d - 1)\Omega^2}, \quad (3.36)$$

$$\omega_{10}^2 \approx b_1 - \frac{b_0}{b_1} = k_1^2 + k_2^2 + 2(2d - 1)\Omega^2 - \omega_{20}^2. \quad (3.37)$$

Вычисление собственных частот системы по этим формулам требует меньше вычислительных затрат, чем использование (3.33), но дает приближенный результат. Получаемые с использованием формул (3.36) и (3.37) значения для собственных частот находятся в пределах 2% от значений, полученных по формулам (3.33).

Рассмотрим другой, более простой и более точный способ вычисления собственных частот чувствительного элемента вибрационного гироскопа с

дополнительной рамкой. Если проанализировать графики зависимости первой производной для собственных частот системы от переносной угловой скорости (рис. 3.8), то нетрудно видеть, что эта зависимость близка к линейной. Из этого следует, что зависимость самой собственной частоты, определяемой по формуле (3.33), от переносной угловой скорости близка к квадратичной. Будем искать выражения для собственных частот вибрационного гироскопа в следующем виде:

$$\omega_j(\Omega) = k_j + l_j \frac{\Omega^2}{2}, \quad (3.38)$$

где $j=1,2$; l_j - некоторый постоянный коэффициент, зависящий только от параметров конструкции. Нахождение постоянной составляющей в выражении (3.38) очевидно, так как из формулы (3.33) следует, что $(\omega_{0j}^2)_{\Omega=0} = k_j^2$. Продифференцируем обе части выражения (3.38). Получим: $(d\omega_j/d\Omega) = l_j \Omega$. Поскольку l_j не зависит от переносной угловой скорости, то приняв $\Omega=1$ мы получаем необходимую для ее нахождения зависимость $l_j = (d\omega_j/d\Omega)_{\Omega=1}$. Дифференцируя по Ω выражения (3.33) и принимая $\Omega=1$ после упрощения и приведения подобных слагаемых, получаем

$$l_j = \left(\frac{s_3}{2} + \frac{(-1)^j}{2} \frac{2s_2 - s_1 s_3}{\sqrt{s_1^2 - 4s_0}} \right) / \sqrt{2s_1 - (-1)^j 2\sqrt{s_1^2 - 4s_0}}, \quad (3.39)$$

где $s_0 = (k_1^2 - 1)(k_2^2 - 1)$, $s_1 = k_1^2 + k_2^2 + 2(2d - 1)$, $s_2 = 2(2 - k_2^2 - k_1^2)$, $s_3 = 4(2d - 1)$.

Если парциальные частоты равны между собой ($k_1 = k_2$), то вдали от границы устойчивости зависимость собственных частот от переносной угловой скорости будет близка к линейной. В этом случае зависимость (3.38) преобразуется к виду

$$\omega_j(\Omega) = k_j + l_j \Omega, \quad (3.40)$$

где $j=1,2$, а постоянный коэффициент l_j определяется из соотношения (3.39), в котором принято, что $k_1 = k_2$. Представление собственных частот чувствительного элемента одномассового вибрационного гироскопа с

рамкой в виде (3.38) или (3.40) позволяет более просто учитывать зависимость собственных частот от измеряемой угловой скорости.

3.1.6. Амплитудно- и фазочастотные характеристики

Движение чувствительного элемента микромеханического вибрационного гироскопа с рамкой на основании, которое вращается с постоянной переносной угловой скоростью $\vec{\Omega} = \{0, 0, \Omega\}$, описывается системой дифференциальных уравнений (3.10). Применив к этой системе преобразование Лапласа при нулевых начальных условиях, получим

$$\begin{cases} (p^2 + 2h_1p + k_1^2 - \Omega^2)X_1(p) - 2\Omega pX_2(p) = 0, \\ 2d\Omega pX_1(p) + (p^2 + 2h_2p + k_2^2 - \Omega^2)X_2(p) = Q_2(p). \end{cases} \quad (3.41)$$

Используя передаточные функции, система (3.41) может быть представлена схематически так, как показано на рис. 3.9.

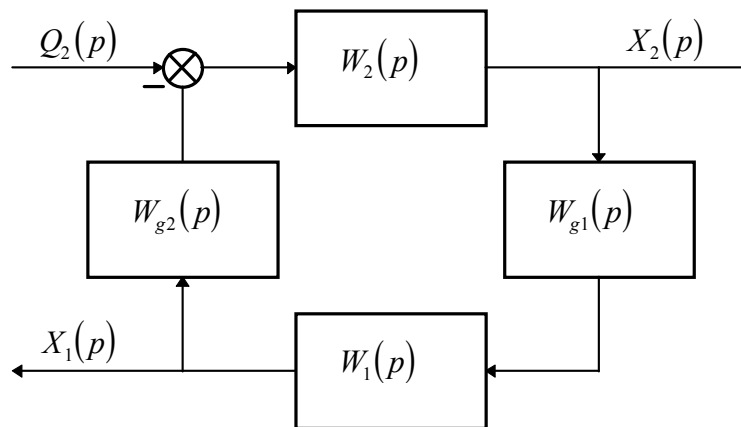


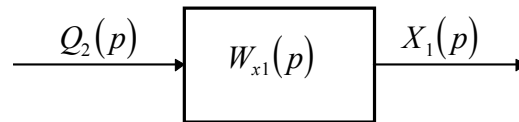
Рис. 3.9. Базовая структурная схема чувствительного элемента вибрационного гироскопа с рамкой

Выражения для передаточных функций на рис. 3.9 имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} W_1(p) &= \frac{1}{p^2 + 2h_1p + k_1^2 - \Omega^2}, \quad W_2(p) = \frac{1}{p^2 + 2h_2p + k_2^2 - \Omega^2}, \\ W_{g1}(p) &= 2p\Omega, \quad W_{g2}(p) = 2dp\Omega. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Входным воздействием на структурной схеме (рис. 3.9) является сила, создаваемая системой возбуждения и действующая на рамку. При таком представлении измеряемая переносная угловая скорость не является

входом системы, а только ее параметром. Тем не менее при выборе рабочей частоты следует добиваться максимального коэффициента передачи именно по возбуждению, так как фактически этот сигнал модулируется измеряемым воздействием. Выходом исследуемой системы являются вторичные колебания инерционной массы, и структурную схему можно привести в виду:



Для приведенной схемы

$$W_{x1}(p) = \frac{X_1(p)}{Q_2(p)} = \frac{2p\Omega}{(p^2 + 2h_1p + k_1^2 - \Omega^2)(p^2 + 2h_2p + k_2^2 - \Omega^2) + 4p^2\Omega^2d}. \quad (3.43)$$

Заменой $p = i\omega$ переходим к комплексной передаточной функции

$$W_{x1}(i\omega) = \frac{2i\omega\Omega}{(k_1^2 - \Omega^2 - \omega^2 + 2h_1i\omega)(k_2^2 - \Omega^2 - \omega^2 + 2h_2i\omega) - 4\omega^2\Omega^2d}. \quad (3.44)$$

Следует отметить, что полученное из (3.43) выражение (3.44) эквивалентно решению (3.18) для комплексной амплитуды \bar{A}_1 . Выражения для амплитудно-частотной и фазочастотной характеристик первичных колебаний следующие:

$$A_1(\omega) = \frac{2\omega}{\Delta} \Omega, \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} \Delta^2 = & \left[(k_1^2 - \Omega^2 - \omega^2)(k_2^2 - \Omega^2 - \omega^2) - 4\omega^2(h_1h_2 + d\Omega^2) \right]^2 + \\ & + 4\omega^2 \left[h_1(k_2^2 - \Omega^2 - \omega^2) + h_2(k_1^2 - \Omega^2 - \omega^2) \right]^2, \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\varphi_1(\omega) = \arctg \left(\frac{(k_1^2 - \Omega^2 - \omega^2)(k_2^2 - \Omega^2 - \omega^2) - 4(h_1h_2 + d\Omega^2)\omega^2}{2\omega[h_1(k_2^2 - \Omega^2 - \omega^2) + h_2(k_1^2 - \Omega^2 - \omega^2)]} \right).$$

Амплитудно- и фазочастотная характеристики первичных колебаний инерционной массы представлены на рис. 3.10 и рис. 3.11 соответственно.

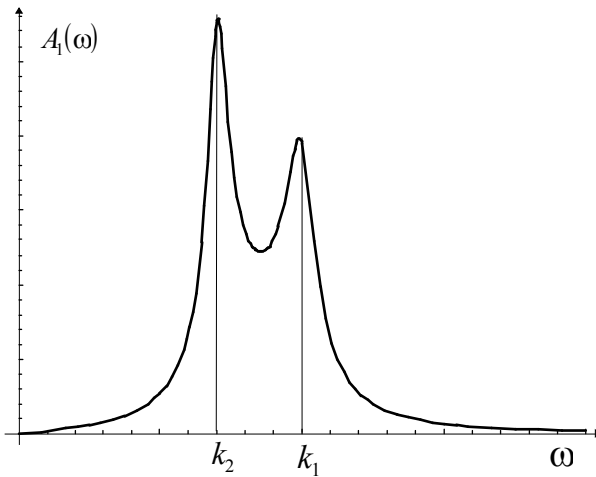


Рис. 3.10. Амплитудно-частотная характеристика колебаний инерционной массы

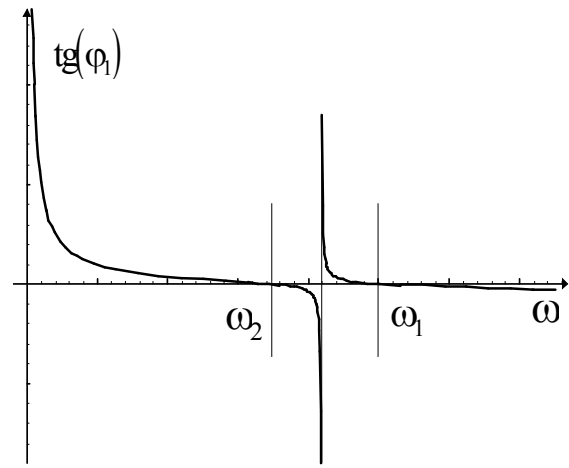
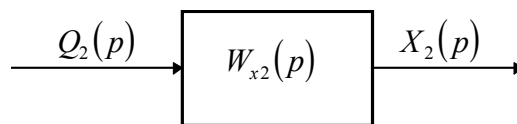


Рис. 3.11. Тангенс фазы колебаний инерционной массы

Для еще большей чувствительности системы к переносной угловой скорости имеет смысл проектировать чувствительный элемент так, чтобы обе ее собственные частоты ω_1 и ω_2 были близкими. Как видно из графика на рис. 3.10, колебания инерционной массы при возбуждении на нижней из собственных частот происходят с большей амплитудой. Поэтому, для повышения чувствительности системы к переносной угловой скорости желательно выбирать в качестве рабочей частоту, которая по величине близка к меньшей из собственных частот.

Рассмотрим теперь выход системы, соответствующий первичным колебаниям вдоль оси X_2 . Для этого приведем систему на рис. 3.9 к виду



В этом случае передаточная функция $W_{x_2}(p)$ будет определяться как

$$W_{x_2}(p) = \frac{X_2(p)}{Q_2(p)} = \frac{p^2 + 2h_1p + k_1^2 - \Omega^2}{(p^2 + 2h_1p + k_1^2 - \Omega^2)(p^2 + 2h_2p + k_2^2 - \Omega^2) + 4p^2d\Omega^2}. \quad (3.47)$$

Заменой $p = i\omega$ переходим к комплексной передаточной функции

$$W_{x_2}(i\omega) = \frac{k_1^2 - \Omega^2 - \omega^2 + 2h_1i\omega}{(k_1^2 - \Omega^2 - \omega^2 + 2h_1i\omega)(k_2^2 - \Omega^2 - \omega^2 + 2h_2i\omega) - 4\omega^2 d\Omega^2}. \quad (3.48)$$

Выражение для амплитудно-частотной характеристики первичных колебаний имеет вид

$$A_2(\omega) = \sqrt{\frac{(k_1^2 - \Omega^2 - \omega^2)^2 + 4h_1^2\omega^2}{\Delta^2}}. \quad (3.49)$$

Амплитудно-частотная характеристика вторичных колебаний представлена на рис. 3.12.

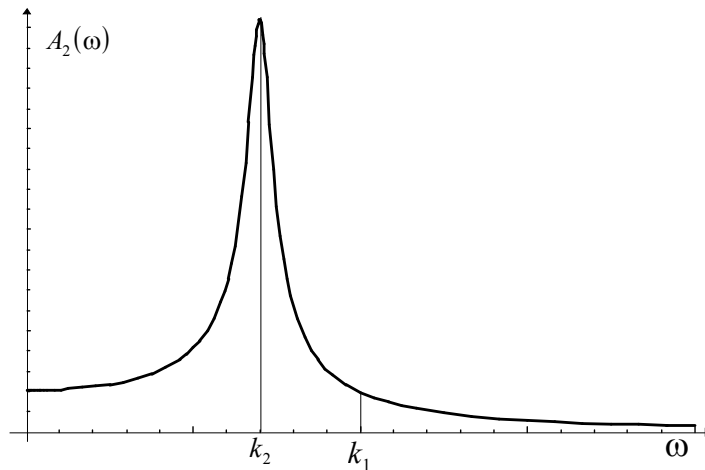


Рис. 3.12. Амплитудно-частотная характеристика входных колебаний

Из графика на рис. 3.12 видно, что влияние вторичных колебаний инерционной массы на первичные мало и не приводит к заметному изменению движения вдоль оси X_2 из-за угловой скорости.

3.2. Схемы построения измерителя угловой скорости на вибрационном гироскопе с дополнительной рамкой

Большинство современных конструкций микромеханических гироскопов используют схему прямого измерения угловой скорости. Однако, постоянно возрастающие требования к точности, диапазону, быстродействию и другим характеристикам микромеханических датчиков угловой скорости, привели к использованию схем с обратными связями.

3.2.1. Схема прямого измерения угловой скорости

При использовании прямой схемы измерения информативные колебания чувствительного элемента определяются только переносной угловой скоростью вращения основания. Как было показано в пункте 3.1.3, амплитуда колебаний инерционной массы пропорциональна измеряемой угловой скорости. Производя регистрацию колебаний инерционной массы, фильтрацию и выделение огибающей, мы получаем сигнал, величина которого пропорциональна угловой скорости. С точки зрения анализа различных характеристик получаемой огибающей необходимо иметь ее уравнение. Рассмотрим методику получения уравнений и анализа параметров огибающей колебаний инерционной массы. Дифференциальные уравнения движения чувствительного элемента для малых медленно меняющихся угловых скоростей запишем в виде

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2h_1\dot{x}_1 + k_1^2x_1 = 2\Omega\dot{x}_2 + \dot{\Omega}x_2, \\ \ddot{x}_2 + 2h_2\dot{x}_2 + k_2^2x_2 = q_2(t), \end{cases} \quad (3.50)$$

где влиянием колебаний по координате x_1 на возбуждаемые колебания по координате x_2 мы пренебрегаем по сравнению с $q_2(t)$. Исходя из предположения о гармоническом характере движения чувствительного элемента под действием гармонической силы $q_2(t)$, имеющей частоту ω , представим обобщенные координаты x_1 и x_2 в виде

$$x_1 = \text{Im}\{A_1(t)e^{i\omega t}\}, \quad x_2 = \text{Im}\{A_2(t)e^{i\omega t}\}, \quad (3.51)$$

где $A_1(t)$ и $A_2(t)$ - комплексные амплитуды колебаний чувствительного элемента, которые связаны с действительными амплитудами и фазами следующим образом: $A_j(t) = A_{j0} e^{i\varphi_j(t)}$ ($j = 1, 2$). После подстановки (3.51) в (3.50), дифференцирования и приведения подобных слагаемых, получаем уравнения движения чувствительного элемента в комплексных амплитудах

$$\begin{cases} \ddot{A}_1 + 2(h_1 + i\omega)\dot{A}_1 + (k_1^2 - \omega^2 + 2i\omega h_1)A_1 = 2(\dot{A}_2 + i\omega A_2)\Omega + A_2\dot{\Omega}, \\ \ddot{A}_2 + 2(h_2 + i\omega)\dot{A}_2 + (k_2^2 - \omega^2 + 2i\omega h_2)A_2 = Q_2. \end{cases} \quad (3.52)$$

С учетом непостоянства угловой скорости Ω уравнения (3.52) можно считать уравнениями с постоянными коэффициентами только для установившихся колебаний по координате x_2 . Тогда для $A_2 = \text{const}$ система уравнений (3.52) преобразуется к совокупности

$$\begin{cases} \ddot{A}_1 + 2(h_1 + i\omega)\dot{A}_1 + (k_1^2 - \omega^2 + 2i\omega h_1)A_1 = (2i\omega\Omega + \dot{\Omega})A_2, \\ (k_2^2 - \omega^2 + 2i\omega h_2)A_2 = Q_2. \end{cases} \quad (3.53)$$

Искомая амплитуда колебаний будет вычисляться как модуль комплексной амплитуды A_j , а фаза колебаний - как ее фаза. Например, амплитуда возбуждаемых колебаний по координате x_2 будет

$$A_{20} = |A_2| = \left| \frac{Q_2}{k_2^2 - \omega^2 + 2i\omega h_2} \right| = \frac{Q_{20}}{\sqrt{(k_2^2 - \omega^2)^2 + 4h_2^2\omega^2}}. \quad (3.54)$$

Получим уравнение переходного процесса для огибающей колебаний по координате x_1 из общего решения однородного уравнения

$$\ddot{A}_1 + 2(h_1 + i\omega)\dot{A}_1 + (k_1^2 - \omega^2 + 2i\omega h_1)A_1 = 0, \quad (3.55)$$

которое есть однородная часть первого уравнения совокупности (3.53). Переходная функция, как реакция на единичное ступенчатое воздействие, эквивалентна общему решению однородного уравнения при отличном от нуля начальном положении $A_1(0) = A_{01} + i0$ и нулевой начальной скорости $\dot{A}_1(0) = 0$. Решение уравнения (3.55) в этом случае будет

$$A_1(t) = A_{01} e^{-t(h_1+i\omega)} \left[\cos\left(t\sqrt{k_1^2 - h_1^2}\right) + \frac{h_1 + i\omega}{\sqrt{k_1^2 - h_1^2}} \sin\left(t\sqrt{k_1^2 - h_1^2}\right) \right]. \quad (3.56)$$

Здесь принято, что $h_1 < k_1$. Формула для огибающей колебаний по координате x_1 вычисляется как модуль комплексной амплитуды (3.56):

$$A_{10}(t) = \frac{A_{01} e^{-th_1}}{\lambda} \sqrt{\omega^2 \sin^2 \lambda t + (\lambda \cos \lambda t + h_1 \sin \lambda t)^2}, \quad (3.57)$$

где $\lambda = \sqrt{k_1^2 - h_1^2}$. В качестве начального значения A_{01} принимается установившееся значение амплитуды вторичных колебаний, которое следует из совокупности (3.53) при $A_1 = const$ и $\Omega = 1$:

$$A_{01} = \frac{2\omega Q_{20}}{\sqrt{(k_1^2 - \omega^2)^2 + 4h_1^2\omega^2} \sqrt{(k_2^2 - \omega^2)^2 + 4h_2^2\omega^2}}. \quad (3.58)$$

Графики для переходных процессов в огибающей вторичных колебаний при различных частотах возбуждения представлены на рис. 3.13 и 3.14.

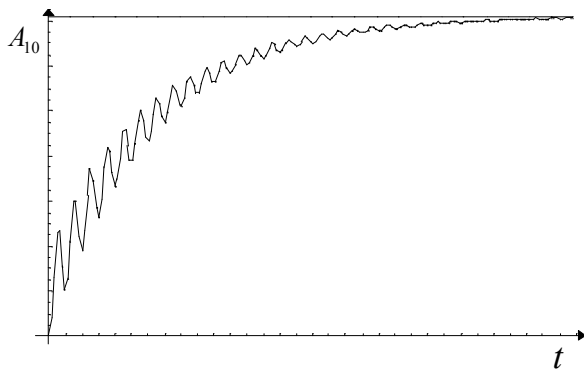


Рис. 3.13. Переходной процесс при

$$\omega = k_2$$

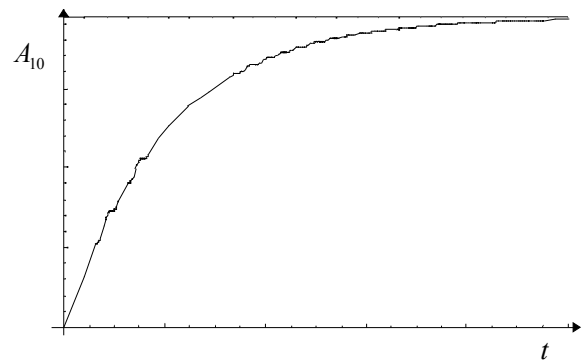


Рис. 3.14. Переходной процесс при

$$\omega = k_1$$

На графиках переходных процессов в амплитуде колебаний наблюдается очевидная колебательность, которая, как следует из выражения (3.57), характеризуется гармоническими составляющими в подкоренном выражении. Преобразуем формулу (3.57) к виду

$$A_{10}(t) = \frac{A_{01} e^{-th_1}}{\lambda\sqrt{2}} \sqrt{h_1^2 + \lambda^2 + \omega^2 - (h_1^2 - \lambda^2 + \omega^2) \cos 2\lambda t + 2h_1\lambda \sin 2\lambda t},$$

или сводя две тригонометрические функции к одной со сдвигом фазы, получаем

$$A_{10}(t) = A_{01} e^{-th_1} \sqrt{C_0 + C_1 \sin(2\lambda t + \beta)}, \quad (3.59)$$

$$C_0 = \frac{k_1^2 + \omega^2}{2(k_1^2 - h_1^2)}, \quad C_1 = \frac{\sqrt{(k_1^2 - \omega^2 - 2h_1^2)^2 + 4h_1^2(k_1^2 - h_1^2)}}{2(k_1^2 - h_1^2)}.$$

Найдем частоту ω , которая минимизирует параметр C_1 , из уравнения

$$\frac{d}{d\omega}(C_1) = 0. \quad (3.60)$$

После дифференцирования находим следующие корни уравнения (3.60)

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = -\sqrt{k_1^2 - 2h_1^2}, \quad \omega_3 = \sqrt{k_1^2 - 2h_1^2}. \quad (3.61)$$

Таким образом, при возбуждении чувствительного элемента вибрационного гироскопа с дополнительной рамкой на частоте, близкой к парциальной частоте выходных колебаний инерционной массы, колебательность огибающей будет минимальна. Тем не менее, на практике чувствительный элемент возбуждают на частоте входных колебаний, так как это повышает амплитуду выходных колебаний.

Для анализа качества переходного процесса удобно использовать интегральный параметр P_1 , который вычисляется для функции ошибки $e(t) = A_{01} - A_{10}(t)$ по формуле

$$P_1 = \int_0^{\infty} [e(t)]^2 dt = \int_0^{\infty} [A_{01} - A_{10}(t)]^2 dt = \int_0^{\infty} [A_{10}(t)]^2 dt. \quad (3.62)$$

Качество переходного процесса будет тем выше, чем меньше будет значение интегрального параметра P_1 . Подстановка (3.57) в (3.62) дает

$$P_1 = \frac{Q_{20}^2 \omega^2 (k_1^2 + \omega^2 + 4h_1^2) \Omega^2}{h_1 k_1^2 \left[(k_1^2 - \omega^2)^2 + 4h_1^2 \omega^2 \right] \left[(k_2^2 - \omega^2)^2 + 4h_2^2 \omega^2 \right]}. \quad (3.63)$$

График зависимости интегрального параметра P_1 от частоты возбуждения ω показан на рис. 3.15. Очевидно, что вблизи парциальных частот чувствительного элемента находятся максимумы интегрального параметра P_1 . Анализ зависимости параметра P_1 от демпфирования, представленной на графике на рис. 3.16, позволяет сделать вывод, что с увеличением демпфирования растет и качество переходного процесса.

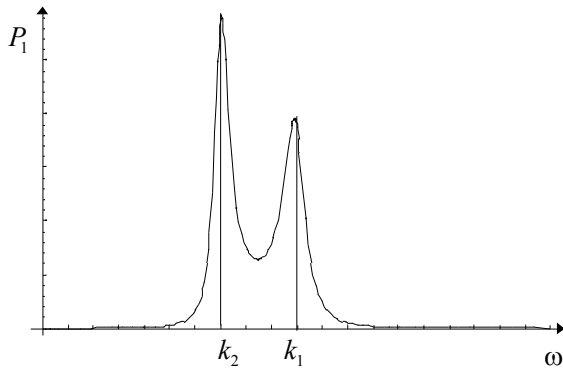


Рис. 3.15. Зависимость параметра P_1 от частоты возбуждения

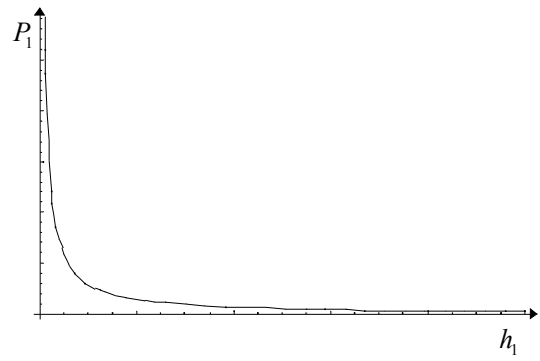


Рис. 3.16. Зависимость параметра P_1 от демпфирования

Другой важной характеристикой переходных процессов является импульсная переходная функция, которая эквивалентна общему решению однородного уравнения (3.55) при нулевом начальном положении $A_1(0) = 0$ и некоторой ненулевой начальной скорости $\dot{A}_1(0) = \dot{A}_{01}$. В этом случае решение уравнения (3.55) будет определяться по формуле

$$A_1(t) = \frac{\dot{A}_{01}}{2\lambda} e^{-h_1 t} e^{-i(\lambda+\omega)t} [\sin 2\lambda t + i(1 - \cos 2\lambda t)], \quad (3.64)$$

где $\lambda = \sqrt{k_1^2 - h_1^2}$, а импульсную переходную функции для огибающей выходных колебаний находим как модуль комплексной амплитуды $A_1(t)$:

$$A_{10}(t) = |A_1(t)| = \frac{\dot{A}_{01}}{\lambda} e^{-h_1 t} \sin \lambda t. \quad (3.65)$$

Из формулы (3.65) видно, что огибающая информативных колебаний обладает колебательностью с частотой $\lambda = \sqrt{k_1^2 - h_1^2}$.

Общее решение однородного дифференциального уравнения (3.55) при ненулевых начальных условиях определяется по формуле

$$A_1(t) = \frac{i}{2\lambda} e^{-h_1 t} \left\{ e^{-i(\lambda+\omega)t} [\dot{A}_{01} + A_{01}(h_1 - i(\lambda - \omega))] - e^{i(\lambda-\omega)t} [\dot{A}_{01} + A_{01}(h_1 + i(\lambda + \omega))] \right\}, \quad (3.66)$$

где $\lambda = \sqrt{k_1^2 - h_1^2}$, $A_{01} = A_1(0)$, $\dot{A}_{01} = \dot{A}_1(0)$. Уравнение для огибающей, соответствующее ее собственным колебаниям при ненулевых начальных условиях, определяется по формуле:

$$A_{10}(t) = |A_1(t)| = \frac{e^{-h_1 t}}{\lambda \sqrt{2}} \sqrt{D_1(t, \dot{A}_{01}, A_{01})}, \quad (3.67)$$

$$D_1 = (A_{01} h_1 + \dot{A}_{01})^2 + A_{01}^2 (\lambda^2 + \omega^2) + 2 A_{01} \lambda (A_{01} h_1 + \dot{A}_{01}) \sin 2\lambda t + \\ + \left[(A_{01} h_1 + \dot{A}_{01})^2 - A_{01}^2 (\lambda^2 - \omega^2) \right] \cos 2\lambda t.$$

Найдем частное решение первого уравнения системы (3.53)

$$\ddot{A}_1 + 2(h_1 + i\omega)\dot{A}_1 + (k_1^2 - \omega^2 + 2i\omega h_1)A_1 = (2i\omega\Omega + \dot{\Omega})A_2, \quad (3.68)$$

для постоянной угловой скорости $\Omega = \Omega_0 = const$:

$$A_1 = \frac{2i\omega A_2}{k_1^2 - \omega^2 + 2ih_1\omega} = const.$$

Уравнение огибающей в установившемся режиме будет

$$A_{10} = |A_1| = \frac{2\omega Q_{20}}{\sqrt{(k_1^2 - \omega^2)^2 + 4h_1^2\omega^2} \sqrt{(k_2^2 - \omega^2)^2 + 4h_2^2\omega^2}} \Omega. \quad (3.69)$$

Формула (3.69) аналогична решениям для постоянной угловой скорости, полученным ранее.

Измерение амплитуды колебаний инерционной массы в направлении координаты x_1 позволяет произвести измерение только модуля переносной угловой скорости, а не ее знака. Если принять угловую скорость отрицательной, то решение уравнения (3.68) для постоянной угловой скорости будет

$$A_1 = -\frac{2i\omega A_2 \Omega}{k_1^2 - \omega^2 + 2i\omega h_1}.$$

С учетом того, что $A_1 = A_{10} e^{i\varphi}$, можем записать

$$A_1 = -\frac{2i\omega A_2 \Omega}{k_1^2 - \omega^2 + 2i\omega h_1} = \frac{2i\omega A_2 \Omega}{k_1^2 - \omega^2 + 2i\omega h_1} e^{i\pi} = A_{10} e^{i(\varphi+\pi)},$$

где A_{10} - равна амплитуде для положительной угловой скорости. Таким образом, при отрицательной угловой скорости фаза выходных колебаний инерционной массы получит добавку, равную π . Значит для получения полной информации об угловой скорости необходимо проводить измерение не только амплитуды колебаний инерционной массы, но и их фазы.

При использовании схемы прямого измерения угловой скорости диапазон измеряемых угловых скоростей ограничен размерами свободного пространства для колебаний инерционной массы, а также зоной линейности жесткости упругих элементов подвеса, так как с увеличением угловой скорости увеличивается и амплитуда выходных колебаний инерционной массы. Этого можно избежать путем введения компенсационных обратных связей.

3.2.2. Схема измерения угловой скорости с обратной связью

В отличие от традиционных гиротакметров, где необходимо компенсировать позиционное отклонение, для вибрационных гироскопов необходимо компенсировать колебания. Смысл компенсации по отношению к вибрационным гироскопам заключается в создании некоторой внешней периодической силы, которая будет действовать на чувствительный элемент прибора так, чтобы амплитуда выходных колебаний инерционной массы была равна, или асимптотически стремилась к нулю. Одним из способов реализации компенсационной схемы может стать создание отрицательных обратных связей в структурной схеме чувствительного элемента, которая была показана в параграфе 3.1 на рис. 3.9. В этом случае структурная схема чувствительного элемента примет вид, представленный на рис. 3.18. На схеме введены следующие дополнительные обозначения: $W_{rf}(p)$ - передаточная функция датчика силы компенсационного контура; $W_{rs}(p)$ - передаточная функция емкостной системы съема; $W_{ru}(p)$ - передаточная функция контура компенсации; $U_r(p)$ - измеряемый на выходе контура компенсации сигнал. Остальные обозначения аналогичны обозначениям на рис. 3.9, и определяются по формулам (3.42).

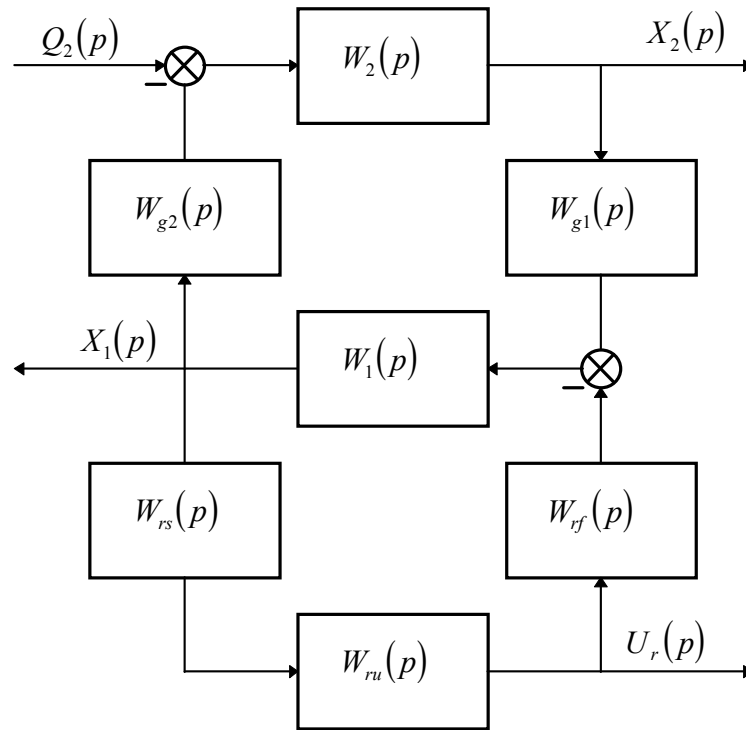


Рис. 3.18. Структурная схема компенсационного вибрационного гироскопа

Вибрационные гироскопы являются резонансными приборами, рабочая частота которых равна одной из собственных частот чувствительного элемента. Задачей контура компенсации есть уменьшение амплитуды колебаний инерционной массы. Этого можно добиться двумя способами, которые следуют из анализа амплитудно-частотной характеристики: создание расстройки между собственной частотой чувствительного элемента и рабочей частотой возбуждения, при котором колебания будут происходить вдали от резонанса со значительно меньшей амплитудой, и увеличение демпфирования до уровня, при котором резонансный пик будет сколь угодно малой высоты. Первый способ реализуется позиционной обратной связью с $W_{ru}(p) = c_{ru} = const$, а второй - скоростной, для которой $W_{ru}(p) = c_{ru}p$. Позиционная обратная связь имеет ряд недостатков при компенсации, по сравнению со скоростной, связанных с нарушением условий резонанса. Для чувствительного элемента, в котором присутствует обратная позиционная связь, уравнения движения (3.10) при $q_1(t) = k_{pr}^2 x_1$ преобразуются к следующему виду:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2h_1\dot{x}_1 + (k_r^2 - \Omega^2)x_1 - 2\Omega\dot{x}_2 = 0, \\ \ddot{x}_2 + 2h_2\dot{x}_2 + (k_2^2 - \Omega^2)x_2 + 2d\Omega\dot{x}_1 = q_2(t). \end{cases} \quad (3.70)$$

Здесь $k_r^2 = k_1^2 - k_{pr}^2$. При такой обратной связи собственная частота, и соответствующий ей на амплитудно-частотной характеристике пик, смещаются вправо от значения частоты возбуждения. Значительное смещение приведет к требуемому значительному снижению амплитуды выходных колебаний инерционной массы. Но с другой стороны, значительное смещение пиков на АЧХ приведет к изменению диапазона линейности масштабного коэффициента, что нежелательно.

В случае отрицательной обратной скоростной связи $q_1(t) = -2h_{vr}\dot{x}_1$ и уравнения движения чувствительного элемента будут

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2h_r\dot{x}_1 + (k_1^2 - \Omega^2)x_1 - 2\Omega\dot{x}_2 = 0, \\ \ddot{x}_2 + 2h_2\dot{x}_2 + (k_2^2 - \Omega^2)x_2 + 2d\Omega\dot{x}_1 = q_2(t), \end{cases} \quad (3.71)$$

где $h_r = h_1 + h_{vr}$. Значительное увеличение демпфирования приведет к значительному снижению пика на АЧХ и, следовательно, к уменьшению амплитуды колебаний инерционной массы. Если принять передаточные функции емкостного датчика перемещений и датчика силы в виде постоянных коэффициентов c_{rs} и c_{rf} соответственно, $W_{ru}(p) = c_{ru}p$, то для схемы на рис. 3.18

$$2h_{vr} = c_{rs}c_{ru}c_{rf} = c_r. \quad (3.72)$$

В случае скоростной компенсации колебаний инерционной массы регистрируемым выходным сигналом будет напряжение U_r в контуре компенсации. Передаточная функция для выходного напряжения в случае скоростной компенсации будет

$$W_u(p) = \frac{U_r}{Q_2} = W_{x1}W_{rs}W_{ru} = \frac{2c_u p^2 \Omega}{(p^2 + 2h_1 p + k_1^2)(p^2 + 2h_2 p + k_2^2) + 4p^2 \Omega^2 d}, \quad (3.73)$$

где $W_{x1}(p) = X_1(p)/Q_2(p)$ - передаточная функция для выходных колебаний инерционной массы, определяемая по формуле (3.43); $c_u = c_{rs}c_{ru}$ -

коэффициент усиления. Амплитуду и фазу колебаний напряжения в контуре компенсации в зависимости от частоты возбуждения находим как амплитуду и фазу комплексной передаточной функции $W_u(i\omega)$:

$$A_u(\omega) = \frac{2c_u\omega^2}{\sqrt{\Delta_u^2(\omega, \Omega)}} \Omega, \quad (3.74)$$

$$\Delta_u(\omega, \Omega) = \left[(k_1^2 - \omega^2)(k_2^2 - \omega^2) - 4\omega^2(h_1h_2 + d\Omega^2) \right]^2 + 4\omega^2 \left[h_1(k_2^2 - \omega^2) + h_2(k_1^2 - \omega^2) \right]^2$$

$$\operatorname{tg}(\varphi_u(\omega)) = -\frac{2\omega \left[h_1(k_2^2 - \omega^2) + h_2(k_1^2 - \omega^2) \right]}{(k_1^2 - \omega^2)(k_2^2 - \omega^2) - 4(h_1h_2 + d\Omega^2)\omega^2}.$$

Графики для амплитуды и тангенса фазы выходного напряжения контура компенсации изображены на рис. 3.19 и 3.20 соответственно.

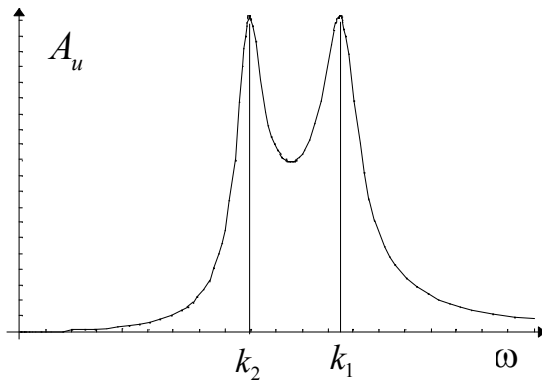


Рис. 3.19. АЧХ выходного сигнала

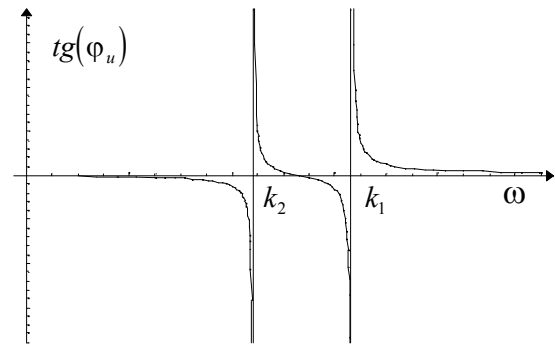


Рис. 3.20. ФЧХ выходного сигнала

При скоростной компенсации выражение для передаточной функции W_{x1} для колебаний инерционной массы по оси X_1 изменится и будет

$$W_{x1}(p) = \frac{2p\Omega}{(p^2 + 2(h_1 + h_r)p + k_1^2 - \Omega^2)(p^2 + 2h_2p + k_2^2 - \Omega^2) + 4p^2\Omega^2d}. \quad (3.75)$$

Соответствующая ей амплитуда колебаний инерционной массы при скоростной компенсации будет определяться по формуле

$$A_{x1}(\omega) = \frac{2\omega}{\sqrt{\Delta_{x1}(\omega, \Omega)}} \Omega, \quad (3.76)$$

$$\Delta_{x1}(\omega, \Omega) = \left[(k_1^2 - \omega^2)(k_2^2 - \omega^2) - 4(h_1 + h_r)h_2\omega^2 - 4d\omega^2\Omega^2 \right]^2 + 4\omega^2 \left[(h_1 + h_r)(k_2^2 - \omega^2) + h_2(k_1^2 - \omega^2) \right]^2.$$

График АЧХ колебаний инерционной массы вдоль оси X_1 со скоростной компенсацией и без нее изображен на рис. 3.21.

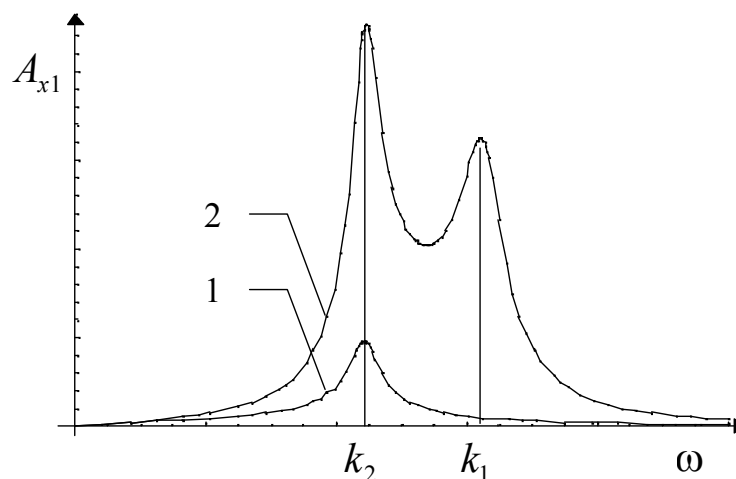


Рис. 3.21. АЧХ колебаний инерционной массы:

1 - со скоростной компенсацией, 2 - без компенсации

Из анализа графика на рис. 3.21 следует, что при возбуждении чувствительного элемента с частотой, равной собственной частоте выходных колебаний инерционной массы, эффективность работы компенсационной схемы выше. Следует отметить, что с увеличением коэффициента демпфирования $h_r = h_1 + h_{vr}$ будет уменьшаться время переходного процесса в огибающей выходных колебаний. Это следует из полученной ранее формулы (3.57). При дальнейшем увеличении суммарного коэффициента демпфирования h_r может наступить момент, когда $h_r > k_1$. В этом случае переходные характеристики, которые были получены ранее, существенно изменятся. Решение уравнения (3.55) при ненулевой начальной амплитуде ($A_1(0) = A_{01} + i0$, $\dot{A}_1(0) = 0$) будет

$$A_1(t) = \frac{A_{01}}{2\lambda} e^{-t(h_r + \lambda + i\omega)} [\lambda - h_r - i\omega + e^{2\lambda t} (\lambda + h_r + i\omega)]. \quad (3.77)$$

Здесь принято, что $h_r > k_1$ и $\lambda = \sqrt{h_r^2 - k_1^2}$. Формула для огибающей колебаний по координате x_1 находим как модуль амплитуды (3.77):

$$A_{10}(t) = \frac{A_{01} e^{-t(h_r + \lambda)}}{2\lambda} \sqrt{[\lambda - h_r + e^{2\lambda t}(\lambda + h_r)]^2 + (e^{2\lambda t} - 1)^2 \omega^2}. \quad (3.78)$$

Качественный график переходного процесса для случая $h_r > k_1$ изображен на рис. 3.22.

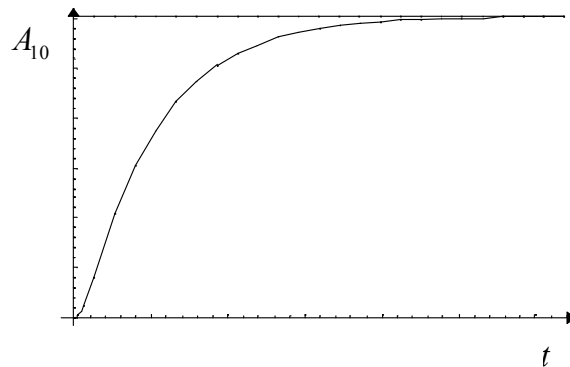


Рис. 3.22. Переходной процесс в огибающей при $h_r > k_1$

Анализ полученной формулы (3.78) для огибающей выходных колебаний инерционной массы чувствительного элемента и графика на рис. 3.22 показывает аperiodичность переходного процесса. Численный расчет параметров переходного процесса показывает значительное (на порядок) увеличение быстродействия системы. Вид переходного процесса, изображенного на рис. 3.22, принципиально не меняется в зависимости от выбора частоты возбуждения, как это имело место для случая колебательной огибающей при $h_1 < k_1$. Результаты численного моделирования поведения чувствительного элемента вибрационного гироскопа прямого измерения показаны на рис. 3.23 и рис. 3.24, а со скоростной обратной связью на рис. 3.25. Схема численного моделирования приведена в приложении А. Общий коэффициент усиления контура скоростной обратной связи выбран $h_{vr} = 10000$. Переносная угловая скорость вращения основания имеет вид прямоугольного импульса, который начинается при $t = 0.02$ с, а заканчивается при $t = 0.05$ с.

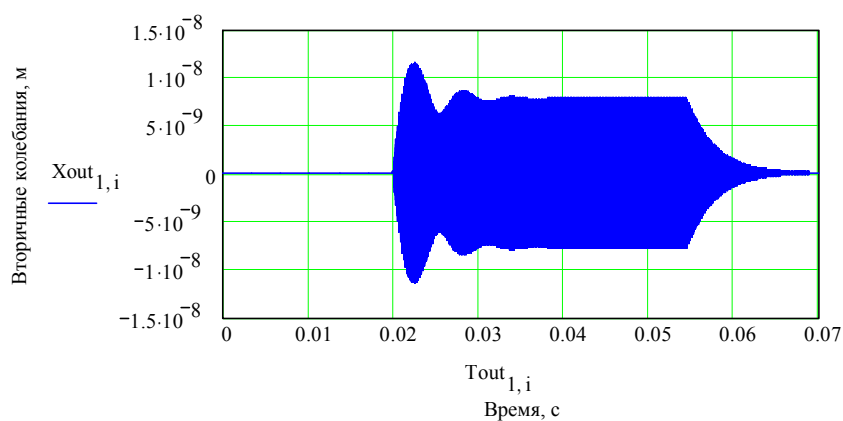


Рис. 3.23. Выходные колебания гироскопа прямого измерения

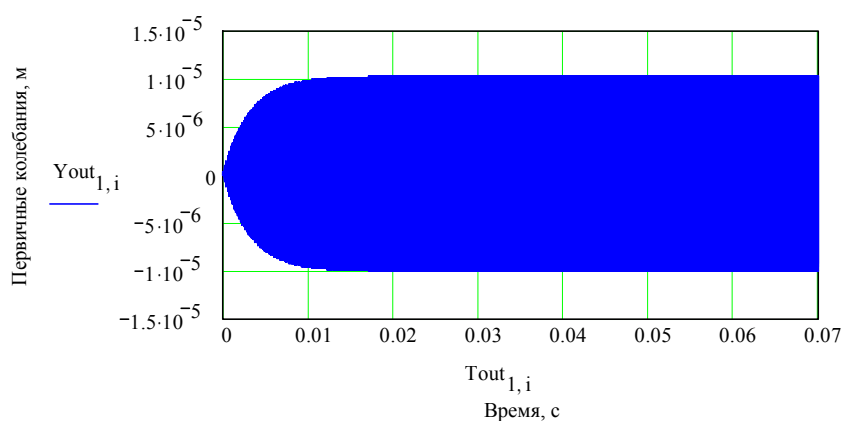


Рис. 3.24. Первичные колебания чувствительного элемента

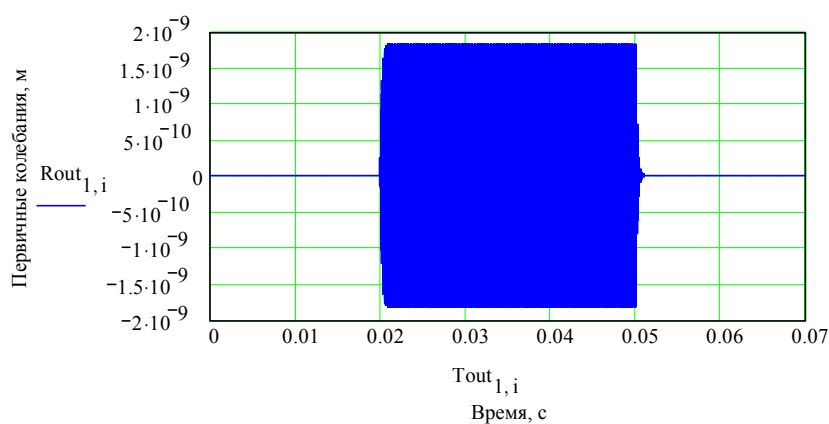


Рис. 3.25. Выходные колебания при скоростной обратной связи

Анализ полученных результатов подтвердил предполагаемое улучшение качества переходного процесса при использовании скоростной компенсационной обратной связи. Амплитуда колебаний чувствительного элемента по координате x_1 и амплитуда колебаний сигнала в контуре компенсации достаточно точно отображают форму импульса измеряемой

угловой скорости, что связано со значительным повышением быстродействия по сравнению со схемой прямого измерения.

Позиционная обратная связь, которая упоминалась ранее, может использоваться для изменения собственной частоты чувствительного элемента так, чтобы она точно равнялась частоте возбуждения и прибор работал в резонансе. Для этого коэффициент обратной связи выбирается пропорциональным фазе φ_1 выходных колебаний инерционной массы, которая для схемы прямого измерения в резонансе равна нулю (рис. 3.11). В случае компенсационной схемы коэффициент позиционной обратной связи выбирается пропорциональным $\varphi_1 - \pi/2$.

Использование компенсационной схемы для микромеханических гироскопов оправдано только в случае высоких требований по точности измерений и быстродействию. Для гироскопов низкой точности вполне приемлемые результаты дает схема прямого измерения.

3.3. Выводы

В данном разделе работы были рассмотрены особенности динамики чувствительного элемента одномассового вибрационного гироскопа с дополнительной рамкой на вращающемся основании. Исходя из результатов проведенных исследований, а также с точки зрения улучшения характеристик рассмотренного датчика угловой скорости, можно сделать следующие замечания:

- для повышения чувствительности датчиков с рассмотренной схемой необходимо реализовывать возбуждение на собственной частоте первичных (возбуждаемых) колебаний;
- для малых переносных угловых скоростей вращения основания амплитуда колебаний инерционной массы чувствительного элемента пропорциональна этой угловой скорости;
- собственные частоты чувствительного элемента зависят от угловой скорости вращения основания. Эта зависимость достаточно точно аппроксимируется линейной функцией для равных парциальных частот и квадратичной функцией в остальных случаях;
- устойчивые колебания чувствительного элемента рассмотренной схемы происходят при значениях угловой скорости, меньших парциальной частоты первичных колебаний по абсолютной величине;
- использование скоростной компенсационной обратной связи значительно повышает быстродействие гироскопа и увеличивает диапазон измеряемых угловых скоростей.

Приведенные выше результаты исследований динамики одномассового гироскопа с дополнительной рамкой позволяют теперь провести анализ погрешностей измерения угловой скорости и выработать рекомендации по их уменьшению.

4. ПОГРЕШНОСТИ ВИБРАЦИОННОГО ГИРОСКОПА С ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ РАМКОЙ

Разработка гироскопического прибора заданной точности требует детального изучения погрешностей, которые присутствуют в выходном сигнале датчика. Подобное исследование позволит разработать методы устранения погрешностей и повышения точности прибора. Рассмотрим основные источники погрешностей вибрационного гироскопа с дополнительной рамкой, а также методы оценки и устранения этих погрешностей.

4.1. Влияние поступательного ускорения на динамику чувствительного элемента

Исследуем движение чувствительного элемента микромеханического вибрационного гироскопа с промежуточной рамкой на основании, которое совершает угловое движение с постоянной скоростью $\vec{\Omega} = \{0, 0, \Omega\}$ и поступательное с постоянным ускорением $\vec{w} = \{w_1, w_2, 0\}$. Уравнения движения чувствительного элемента в этом случае имеют вид:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2h_1\dot{x}_1 + (k_1^2 - \Omega^2)x_1 - 2\Omega\dot{x}_2 = -w_1, \\ \ddot{x}_2 + 2h_2\dot{x}_2 + (k_2^2 - \Omega^2)x_2 + 2d\Omega\dot{x}_1 = q_2 - w_2. \end{cases} \quad (4.1)$$

Система уравнений (4.1) линейна, и поэтому, для нахождения решения системы, которое соответствует реакции чувствительного элемента на постоянное поступательное ускорение, можем воспользоваться принципом суперпозиции. Примем во внимание, что на чувствительный элемент действуют как поступательное ускорение, так и силы гармонического возбуждения. Тогда влияние постоянного ускорения на движение чувствительного элемента будет описываться частным решением системы

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2h_1\dot{x}_1 + (k_1^2 - \Omega^2)x_1 - 2\Omega\dot{x}_2 = -w_1, \\ \ddot{x}_2 + 2h_2\dot{x}_2 + (k_2^2 - \Omega^2)x_2 + 2d\Omega\dot{x}_1 = -w_2. \end{cases} \quad (4.2)$$

Частное решение системы (3.51) будем искать в виде

$$x_j = x_{j0} = \text{const}, \quad j = 1, 2. \quad (4.3)$$

Подставляя решение (4.3) в систему (4.2) получаем следующие формулы для смещений инерционной массы и рамки от постоянного ускорения:

$$x_{j0} = -\frac{w_j}{k_j^2 - \Omega^2} \approx -\frac{w_j}{k_j^2}, \quad j = 1, 2. \quad (4.4)$$

Как следует из формулы (4.4), реакцией чувствительного элемента на постоянное поступательное ускорение будет постоянное смещение в сторону, противоположную направлению вектора ускорения и пропорциональное величине этого ускорения. Постоянная составляющая в выходных колебаниях инерционной массы устраняется фильтрацией сигнала с датчика перемещений на рабочей частоте.

4.2. Погрешность от поступательной вибрации основания

В случае поступательной вибрации основания движение чувствительного элемента гироскопа будет описываться системой дифференциальных уравнений (4.2), в которых

$$w_1 = w_{10} \cos(\lambda t), \quad w_2 = w_{20} \cos(\lambda t). \quad (4.5)$$

Предполагается, что вектор переносной угловой скорости имеет вид $\vec{\Omega} = \{0, 0, \Omega\}$, а вектор поступательного ускорения лежит в плоскости чувствительного элемента. Как и для системы (4.1), воспользуемся принципом суперпозиции. Частные решения системы дифференциальных уравнений движения чувствительного элемента будем искать в виде:

$$x_j = \text{Re}\{A_{\lambda j} e^{i(\lambda t + \varphi)}\}, \quad j = 1, 2. \quad (4.6)$$

После перехода к комплексным амплитудам и подстановки решения (4.6) в систему (4.2), получаем следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} (k_1^2 - \Omega^2 - \lambda^2 + 2h_1i\lambda)\bar{A}_{\lambda 1} - 2\Omega i\lambda\bar{A}_{\lambda 2} = -w_{10}, \\ 2d\Omega i\lambda\bar{A}_{\lambda 1} + (k_2^2 - \Omega^2 - \lambda^2 + 2h_2i\lambda)\bar{A}_{\lambda 2} = -w_{20}. \end{cases} \quad (4.7)$$

Главный определитель системы (4.7) имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}(\lambda, \Omega^2) &= (k_1^2 - \Omega^2 - \lambda^2)(k_2^2 - \Omega^2 - \lambda^2) - 4\lambda^2(h_1h_2 + d\Omega^2) + \\ &+ 2i\lambda[h_1(k_2^2 - \Omega^2 - \lambda^2) + h_2(k_1^2 - \Omega^2 - \lambda^2)]. \end{aligned}$$

Решение системы (4.7) относительно комплексных амплитуд будет

$$\begin{aligned} \bar{A}_{\lambda 1} &= -\frac{w_{10}(k_2^2 - \Omega^2 - \lambda^2) + 2i\lambda(h_2w_{10} + \Omega w_{20})}{\bar{\Delta}(\lambda, \Omega^2)}, \\ \bar{A}_{\lambda 2} &= -\frac{w_{20}(k_1^2 - \Omega^2 - \lambda^2) - 2i\lambda(h_1w_{20} + d\Omega w_{10})}{\bar{\Delta}(\lambda, \Omega^2)}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Переход к действительным амплитудам в формулах (4.8) дает выражения для амплитуд, обусловленных поступательной вибрацией основания:

$$\begin{aligned} A_{\lambda 1} &= \left[\frac{w_{10}^2(k_2^2 - \Omega^2 - \lambda^2)^2 + 4\lambda^2(h_2w_{10} + \Omega w_{20})^2}{\Delta^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \\ A_{\lambda 2} &= \left[\frac{w_{20}^2(k_1^2 - \Omega^2 - \lambda^2)^2 + 4\lambda^2(h_1w_{20} + d\Omega w_{10})^2}{\Delta^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

где Δ - определяется аналогично (3.20). Колебания чувствительного элемента, вызванные поступательной вибрацией, будут происходить на частоте вибрации основания. Если частота вибрации основания не совпадает с рабочей частотой прибора ($\lambda \neq \omega$), то при фильтрации выходного сигнала датчика на рабочей частоте, колебания от вибрации будут отфильтрованы. Если частота вибрации основания совпадает с частотой возбуждения ($\lambda = \omega$), то амплитуда выходных колебаний инерционной массы будет определяться выражением

$$A_1 = \frac{2\omega q_2 \Omega + \sqrt{w_{10}^2(k_2^2 - \Omega^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2(h_2w_{10} + \Omega w_{20})^2}}{\Delta}. \quad (4.10)$$

Отношение амплитуды колебаний, вызванных вибрацией основания, к амплитуде полезных колебаний обозначим как δA_1 и определим как

$$\delta A_1 = \frac{A_{\lambda 1}}{A_{01}} = \frac{\sqrt{w_{10}^2(k_2^2 - \Omega^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2(h_2 w_{10} + \Omega w_{20})^2}}{2\omega q_2 \Omega}. \quad (4.11)$$

Здесь A_{10} определяется из выражений (3.20). График зависимости относительной погрешности δA_1 от частоты возбуждения представлен на рис. 4.1.

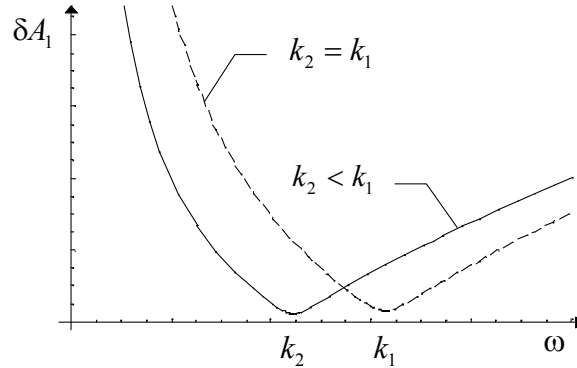


Рис. 4.1. Зависимость погрешности δA_1 от частоты возбуждения

Из графика на рис. 4.1 следует, что относительная погрешность имеет минимум на некоторой частоте $\omega_{\lambda 1}$. Найдем минимум погрешности δA_1 , как решение уравнения $d(\delta A_1)/d\omega = 0$, которое преобразуется к уравнению

$$\omega^4 - (k_2^2 - \Omega^2)^2 = 0. \quad (4.12)$$

Действительное решение уравнения (4.12) и будет частотой минимума погрешности от поступательной вибрации:

$$\omega_{\lambda 1} = \sqrt{k_2^2 - \Omega^2} \approx k_2. \quad (4.13)$$

В случае совпадающих парциальных частот ($k_2 = k_1 = k_0$) такой минимум также имеет место приблизительно на частоте k_0 . Если принять, что амплитуда вибраций равна амплитуде сил возбуждения ($w_{10} = q_2$, $w_{20} = 0$), частота возбуждения равна меньшей из парциальных частот ($\omega = k_2$) и $\Omega = 1$ рад/с, то $\delta A_1 \approx 35$. Такое значение отношения (погрешность/полезный сигнал) достаточно велико, но с другой стороны, оно приблизительно на порядок меньше значения δA_1 , которое соответствует возбуждению на частоте $\omega = k_1$. Более эффективным методом исключения погрешности от

поступательной вибрации могут стать алгоритмические методы компенсации с использованием дополнительной информации от других датчиков (гироскопов и акселерометров). Одним из основных источников поступательной вибрации являются акустические шумы. Диапазоны акустических шумов в месте установки датчика могут быть предварительно изучены и учтены при выборе рабочей частоты и параметров выходного фильтра.

4.3. Динамическая погрешность измерения гармонической угловой скорости

Рассмотрим движение чувствительного элемента микромеханического вибрационного гироскопа с дополнительной рамкой на основании, которое совершает угловую вибрацию вокруг измерительной оси X_3 с частотой λ и амплитудой Ω_0 . Движение чувствительного элемента будет описываться системой уравнений (3.9), в которой $q_2(t) = q_2 \cos(\omega t)$, а $\Omega = \Omega_0 \cos(\lambda t) = \text{Re}\{\Omega_0 e^{i\lambda t}\}$. Когда амплитуда угловых вибраций много меньше парциальной частоты первичных колебаний ($\Omega_0 \ll k_2$) уравнения (3.9) упрощаются к виду

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2h_1\dot{x}_1 + k_1^2 x_1 = 2\Omega\dot{x}_2 + \dot{\Omega}x_2, \\ \ddot{x}_2 + 2h_2\dot{x}_2 + k_2^2 x_2 = q_2 \cos(\omega t) - 2d\Omega\dot{x}_1 - d\dot{\Omega}x_1. \end{cases} \quad (4.14)$$

Полученная система (4.14) является системой линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Однако, колебания чувствительного элемента в направлении оси X_2 (второе уравнение) определяются силами возбуждения и, как показывают результаты численного моделирования (см. приложение А), влиянием движения по координате x_1 на движение по координате x_2 через гироскопическую перекрестную связь можно пренебречь. Тогда система уравнений (4.14) распадается на совокупность

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2h_1\dot{x}_1 + k_1^2x_1 = 2\Omega\dot{x}_2 + \dot{\Omega}x_2, \\ \ddot{x}_2 + 2h_2\dot{x}_2 + k_2^2x_2 = q_2 \cos(\omega t). \end{cases} \quad (4.15)$$

Решение второго уравнения совокупности (4.15) дается второй формулой в выражениях (3.14). Запишем частное решение для x_2 в следующей форме:

$$x_2(t) = \operatorname{Re}\{\bar{A}_2 e^{i\omega t}\} = \operatorname{Re}\{A_2 e^{i(\omega t + \varphi_2)}\}, \quad (4.16)$$

$$A_2 = \frac{q_2}{\sqrt{(k_2^2 - \omega^2)^2 + 4h_2^2\omega^2}}, \quad \operatorname{tg}(\varphi_2) = -\frac{2h_2\omega}{k_2^2 - \omega^2}.$$

Правая часть первого уравнения совокупности (4.15) с учетом (4.16) будет

$$-\frac{\Omega_0}{2} \operatorname{Im}\{\bar{A}_2(2\omega + \lambda)e^{i\lambda t} + \bar{A}_2(2\omega - \lambda)e^{i\lambda t}\}, \quad f_{1,2} = \omega \pm \lambda.$$

Частное решение уравнения (4.15) относительно x_1 будем искать в виде суммы двух колебаний на частотах $f_{1,2} = \omega \pm \lambda$: $x_1(t) = \operatorname{Im}\{\bar{A}_{11} e^{i\lambda t} + \bar{A}_{12} e^{i\lambda t}\}$.

После подстановки предполагаемого решения для $x_1(t)$ в первое уравнение совокупности (4.15) находим комплексные амплитуды

$$\bar{A}_{11,12} = -\frac{\Omega_0 q_2 (2\omega \pm \lambda)}{2[k_1^2 - (\omega \pm \lambda)^2 + 2h_1 i(\omega \pm \lambda)][k_2^2 - \omega^2 + 2h_2 i\omega]}.$$

Переход от комплексных амплитуд к действительным дает

$$A_{11,12} = \frac{\Omega_0 q_2 (2\omega \pm \lambda)}{2\sqrt{\left\{ [k_1^2 - (\omega \pm \lambda)^2]^2 + 4h_1^2(\omega \pm \lambda)^2 \right\} \left\{ (k_2^2 - \omega^2)^2 + 4h_2^2\omega^2 \right\}}}.$$

Следовательно, частное решение относительно переменной x_1 будет

$$x_1(t) = A_{11} \sin[(\omega + \lambda)t + \varphi_{11}] + A_{12} \sin[(\omega - \lambda)t + \varphi_{12}]. \quad (4.17)$$

Здесь начальные фазы $\varphi_{11,12}$ определяются из выражений

$$\operatorname{tg}(\varphi_{11}) = -\frac{2\omega [h_1(1+\nu)(k_2^2 - \omega^2) + h_2(k_1^2 - (1+\nu)^2\omega^2)]}{k_1^2(k_2^2 - \omega^2) - (1+\nu)\omega^2 [4h_1h_2 + (1+\nu)(k_2^2 - \omega^2)]},$$

$$\operatorname{tg}(\varphi_{12}) = -\frac{2\omega [h_1(\nu-1)(\omega^2 - k_2^2) + h_2(k_1^2 - (\nu-1)^2\omega^2)]}{k_1^2(k_2^2 - \omega^2) + (\nu-1)\omega^2 [4h_1h_2 - (\nu-1)(k_2^2 - \omega^2)]},$$

где $\nu = \lambda/\omega$. Если в выражении (4.17) принять частоту вибрации $\lambda = 0$, то получим амплитуду колебаний инерционной массы, вызванных постоянной

угловой скоростью. Произведем в выражении (4.17) следующие замены переменных:

$$A_{11,12} = A_0(1 \pm \delta A), \quad \varphi_{11,12} = \varphi_0 \pm \Delta\varphi.$$

Тогда решение (4.17) представляется в виде

$$x_1(t) = 2A_0 \left[\cos(\lambda t + \Delta\varphi) \sin(\omega t + \varphi_0) + \delta A \sin(\lambda t + \Delta\varphi) \cos(\omega t + \varphi_0) \right].$$

После умножения при демодуляции сигнала, пропорционального $x_1(t)$, на несущую $\sin(\omega t + \varphi_0)$ получаем

$$x_1^*(t) = A_0 \left[\cos(\lambda t + \Delta\varphi) - \cos(\lambda t + \Delta\varphi) \cos(2\omega t + 2\varphi_0) + \delta A \sin(\lambda t + \Delta\varphi) \sin(2\omega t + 2\varphi_0) \right]. \quad (4.18)$$

Первое слагаемое $A_0 \cos(\lambda t + \Delta\varphi)$ есть огибающая, пропорциональная измеряемой угловой скорости, а остальные составляющие идут с удвоенной частотой 2ω и фильтруются низкочастотным фильтром в процессе демодуляции. Уменьшение искажения информации об угловой скорости за счет составляющих с удвоенной частотой есть задача фильтрации при демодуляции. Искажение информации об измеряемой угловой скорости происходит как по амплитуде, так и по фазе. Искажение по фазе $\Delta\varphi$ является хорошо прогнозируемым в достаточно широком диапазоне. Относительная погрешность измерения угловой скорости $\delta\Omega$ по амплитуде в зависимости от относительной частоты угловой вибрации $\nu = \lambda/\omega$ определяется соотношением

$$\delta\Omega = \frac{2\nu^2 \left[\delta\omega^6 + \delta k^2 (1 - 2\zeta^2) (\delta k^4 - \delta\omega^4) + \delta k^4 \delta\omega^2 (4\zeta^4 - 4\zeta^2 - 1) \right]}{\left[\delta k^4 + \delta\omega^4 + 2\delta k^2 \delta\omega^2 (2\zeta^2 - 1) \right]^2}. \quad (4.19)$$

Здесь введены следующие обозначения: $\delta k = k_1/k_2$ - отношение парциальных частот, $\delta\omega = \omega/k_2$ - относительная частота возбуждения, ζ - относительный коэффициент демпфирования. Ширина полосы пропускания гироскопа, в пределах которой относительная погрешность $\delta\Omega$ не превышает наперед заданного уровня, определяется из выражения (4.19) и описывается формулой

$$B = \frac{k_2 \sqrt{\delta \Omega_0} [\delta k^4 + 2\delta \omega^2 \delta k^2 (2\zeta^2 - 1) + \delta \omega^4]}{\sqrt{2[\delta k^2 (2\zeta^2 - 1)(\delta \omega^4 - \delta k^4) + (4\zeta^4 - 4\zeta^2 - 1)\delta \omega^2 \delta k^4 + \delta \omega^6]}}. \quad (4.20)$$

Рассчитываемая по формуле (4.20) ширина полосы пропускания измеряется в рад/с и зависит от различных соотношений характеристик прибора. Анализ зависимости (4.20) показал, что необходимая ширина полосы пропускания обеспечивается при помощи соответствующего выбора значения частоты k_2 и отношения парциальных частот δk , которое выбирается, как правило, в диапазоне $\delta k = 1,01 \div 1,05 > 1$.

4.4. Погрешность от несовпадения упругих и измерительных осей

Одна половина обкладок системы возбуждения и датчиков системы съема микромеханического гироскопа расположены на корпусе. Другая половина обкладок этих систем расположена на чувствительном элементе. В процессе монтажа чувствительного элемента в корпус возможна его установка с перекосом, при которой появляется несовпадение упругих и измерительных осей. Обозначим через $OX_1X_2X_3$ систему координат, по осям которой происходит возбуждение и съём колебаний инерционной массы (рис. 4.2), а $OX'_1X'_2X'_3$ - систему координат, в которых обобщенная матрица жесткостей упругого подвеса имеет диагональный вид. Эти системы координат повернуты относительно друг друга на угол θ вокруг оси X_3 . Движение чувствительного элемента на вращающемся с угловой скоростью $\vec{\Omega} = \{\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3\}$ основании, без учета упругих сил, в системе координат $OX_1X_2X_3$ описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 - (\Omega_2^2 + \Omega_3^2)x_1 - 2\Omega_3\dot{x}_2 + (\Omega_1\Omega_2 - \dot{\Omega}_3)x_2 = 0, \\ \ddot{x}_2 - (\Omega_1^2 + \Omega_3^2)x_2 + 2d\Omega_3\dot{x}_1 + d(\Omega_1\Omega_2 + \dot{\Omega}_3)x_1 = q_2. \end{cases} \quad (4.21)$$

Упругие силы в системе координат $OX'_1X'_2X'_3$ вычисляются по формулам

$$Q'_{e1} = -c_1x'_1, \quad Q'_{e2} = -c_2x'_2, \quad (4.22)$$

где c_1, c_2 - жесткости в направлении соответствующих осей; x'_1, x'_2 - перемещения инерционной массы в системе координат $OX'_1X'_2X'_3$.

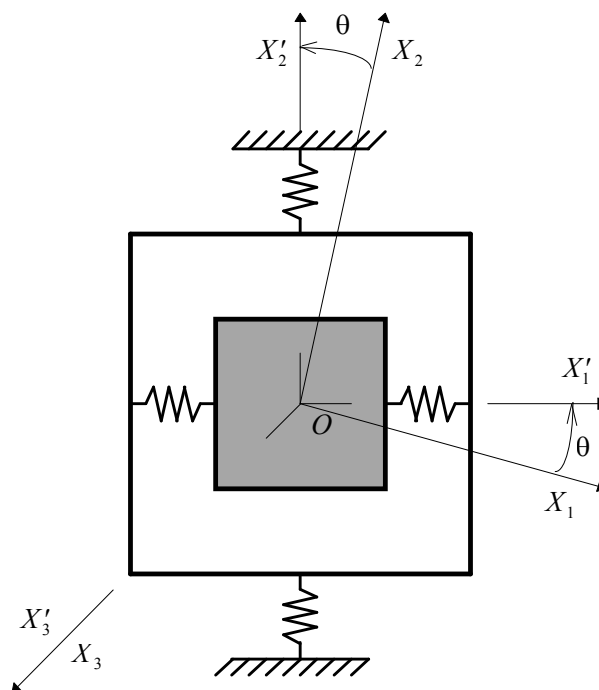


Рис. 4.2. Расположение упругих и измерительных осей

Измеряемые системой съема перемещения инерционной массы x_1 и x_2 связаны с перемещениями в системе координат $OX'_1X'_2X'_3$ следующим образом:

$$x'_1 = x_1 \cos\theta + x_2 \sin\theta, \quad x'_2 = -x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta. \quad (4.23)$$

Упругие силы в системе $OX_1X_2X_3$ с учетом преобразования координат задаются выражениями:

$$Q_{e1} = Q'_{e1} \cos\theta - Q'_{e2} \sin\theta, \quad Q_{e2} = Q'_{e1} \sin\theta + Q'_{e2} \cos\theta. \quad (4.24)$$

С учетом (4.22)-(4.24), правые части уравнений (4.21), которые соответствуют упругим силам, будут иметь вид:

$$q_{e1} = \frac{Q_{e1}}{m_1} = -\frac{k_{11}^2 + k_{21}^2}{2} x_1 - \frac{k_{11}^2 - k_{21}^2}{2} (x_1 \cos 2\theta + x_2 \sin 2\theta), \quad (4.25)$$

$$q_{e2} = \frac{Q_{e2}}{m_1 + m_2} = -\frac{k_{22}^2 + k_{12}^2}{2} x_2 - \frac{k_{22}^2 - k_{12}^2}{2} (-x_1 \sin 2\theta + x_2 \cos 2\theta),$$

где $k_{ij}^2 = c_i/M_j$; $i, j = 1, 2$; $M_1 = m_1$, $M_2 = m_1 + m_2$. Аналогично можем записать выражения для диссипативных сил в случае, если главные оси демпфирования и измерительные оси повернуты на угол ψ :

$$\begin{aligned} q_{d1} &= -(h_{11} + h_{21})\dot{x}_1 - (h_{11} - h_{21})(\dot{x}_1 \cos 2\psi + \dot{x}_2 \sin 2\psi), \\ q_{d2} &= -(h_{22} + h_{12})\dot{x}_2 - (h_{22} - h_{12})(-\dot{x}_1 \sin 2\psi + \dot{x}_2 \cos 2\psi), \end{aligned} \quad (4.26)$$

где $h_{ij} = f_i/2M_j$. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \frac{k_{11}^2 + k_{21}^2}{2} = k_{10}^2, \quad \frac{k_{22}^2 + k_{12}^2}{2} = k_{20}^2, \quad \frac{k_{11}^2 - k_{21}^2}{2} = \Delta k_1^2, \quad \frac{k_{22}^2 - k_{12}^2}{2} = \Delta k_2^2, \\ h_{11} + h_{21} = 2h_{10}, \quad h_{22} + h_{12} = 2h_{20}, \quad h_{11} - h_{21} = \Delta h_1, \quad h_{22} - h_{12} = \Delta h_2. \end{aligned} \quad (4.27)$$

С учетом выражений для упругих сил (4.25), сил демпфирования (4.26) и обозначений (4.27), система уравнений (4.21) преобразуется к виду:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2h_1\dot{x}_1 + (k_{10}^2 - \Omega_2^2 - \Omega_3^2)x_1 - 2\Omega_3\dot{x}_2 + (\Omega_1\Omega_2 - \dot{\Omega}_3)x_2 + \\ + \Delta k_1^2(x_1 \cos 2\theta + x_2 \sin 2\theta) + \Delta h_1(\dot{x}_1 \cos 2\psi + \dot{x}_2 \sin 2\psi) = q_1, \\ \ddot{x}_2 + 2h_2\dot{x}_2 + (k_{20}^2 - \Omega_1^2 - \Omega_3^2)x_2 + 2d\Omega_3\dot{x}_1 + d(\Omega_1\Omega_2 + \dot{\Omega}_3)x_1 + \\ + \Delta k_2^2(x_2 \cos 2\theta - x_1 \sin 2\theta) + \Delta h_2(\dot{x}_2 \cos 2\psi - \dot{x}_1 \sin 2\psi) = q_2. \end{cases} \quad (4.28)$$

Уравнения (4.28) описывают движение чувствительного элемента микромеханического вибрационного гироскопа с дополнительной рамкой при несовпадении осей возбуждения и измерения с осями жесткости упругого подвеса и диссипативных сил. Анализ уравнений (4.28) показывает, что даже в отсутствие переносной угловой скорости вынужденные колебания по координате x_2 будут вызывать колебания по измеряемой координате x_1 . Найдем амплитуду колебаний инерционной массы, которая обусловлена переносной угловой скоростью и углом θ . Будем считать, что угол $\psi = 0$, а угол 2θ мал и, следовательно, $\sin 2\theta \approx 2\theta$, а $\cos 2\theta \approx 1$. Вектор угловой скорости имеет вид $\vec{\Omega} = \{0, 0, \Omega\}$. В этом случае система уравнений (4.28) примет вид:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2h_1\dot{x}_1 + (k_1^2 - \Omega^2)x_1 - 2\Omega\dot{x}_2 + 2\theta\Delta k_1^2x_2 = 0, \\ \ddot{x}_2 + 2h_2\dot{x}_2 + (k_2^2 - \Omega^2)x_2 + 2d\Omega\dot{x}_1 - 2\theta\Delta k_2^2x_1 = q_2. \end{cases} \quad (4.29)$$

Здесь учтено, что $k_{10}^2 + \Delta k_1^2 = k_1^2$ и $k_{20}^2 + \Delta k_2^2 = k_2^2$. Решение (4.29) относительно комплексной амплитуды колебаний инерционной массы \bar{A}_1 при гармоническом возбуждении определяется по формуле:

$$\bar{A}_1 = \frac{2q_2(i\omega\Omega - \Delta k_1^2\theta)}{\bar{\Delta}_\theta}, \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_\theta = & (k_1^2 - \Omega^2 - \omega^2 + 2h_1i\omega)(k_2^2 - \Omega^2 - \omega^2 + 2h_2i\omega) + \\ & + 4(i\omega\Omega - \Delta k_1^2\theta)(i\omega\Omega - \Delta k_2^2\theta). \end{aligned}$$

Переход к действительной амплитуде A_1 дает:

$$A_1 = \frac{2q_2\sqrt{\omega^2\Omega^2 + \theta^2\Delta k_1^4}}{\sqrt{\Delta_\theta^2}}, \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} \Delta_\theta^2 = & [(k_1^2 - \Omega^2 - \omega^2)(k_2^2 - \Omega^2 - \omega^2) - 4\omega^2(h_1h_2 + d\Omega^2)]^2 + \\ & + 4\omega^2[h_1(k_2^2 - \Omega^2 - \omega^2) + h_2(k_1^2 - \Omega^2 - \omega^2) - 2\Omega\theta(\Delta k_1^2 + \Delta k_2^2)]^2 \end{aligned}$$

Очевидно, что при $\theta = 0$ выражения (4.31) эквивалентны полученными ранее решениям (3.20). Представим измеряемую амплитуду колебаний инерционной массы в виде:

$$A_1 \approx A_{01} + A_{\theta 1}, \quad (4.32)$$

где A_{01} - амплитуда колебаний инерционной массы, вызванных измеряемой угловой скоростью, а $A_{\theta 1}$ - погрешность амплитуды, вызванная углом перекоса θ . С учетом того, что $\omega^2\Omega^2 \gg \theta^2\Delta k_1^4$, можем записать

$$A_1 \approx \frac{2q_2\omega\Omega}{\sqrt{\Delta_\theta^2}} + \frac{q_2\theta^2\Delta k_1^4}{\omega\Omega\sqrt{\Delta_\theta^2}}, \quad (\Omega \neq 0),$$

и, следовательно,

$$A_{01} = \frac{2q_2\omega}{\sqrt{\Delta_\theta^2}}\Omega, \quad A_{\theta 1} = \frac{q_2\theta^2\Delta k_1^4}{\omega\Omega\sqrt{\Delta_\theta^2}}. \quad (4.33)$$

Отношение погрешности $A_{\theta 1}$ к полезному сигналу A_{01} вычисляется как

$$\delta A_{\theta 1} = \frac{A_{\theta 1}}{A_{01}} = \frac{\theta^2\Delta k_1^4}{2\omega^2\Omega^2}, \quad (\Omega \neq 0). \quad (4.34)$$

Обнуление относительной погрешности δA_{θ_1} может происходить в двух случаях: если $\Delta k_1^2 = 0$ или угол $\theta = 0$. Первый случай соответствует равножесткому подвесу, так как

$$\Delta k_1^2 = \frac{c_1 - c_2}{2m_1} = 0 \Rightarrow c_1 = c_2. \quad (4.35)$$

Второй случай возможно реализовать при помощи коррекции установки чувствительного элемента в процессе сборки гироскопа. Если обеспечить $\Omega = 0$, то амплитуда вторичных колебаний, вызванная только несовпадением упругих и измерительных осей, определяется по формуле

$$A_1 = \frac{2q_2\theta\Delta k_1^2}{\sqrt{\Delta^2}} = \frac{q_2(c_1 - c_2)}{m_1\sqrt{\Delta^2}}\theta, \quad (4.36)$$

$$\Delta^2 = \left[(k_1^2 - \omega^2)(k_2^2 - \omega^2) - 4\omega^2 h_1 h_2 \right]^2 + 4\omega^2 \left[h_1(k_2^2 - \omega^2) + h_2(k_1^2 - \omega^2) \right]^2.$$

Измерив амплитуду колебаний в этом случае ($\Omega = 0$), можно выполнить разворот чувствительного элемента по отношению к корпусу по часовой стрелке на угол

$$\theta = \frac{A_1 m_1 \sqrt{\Delta^2}}{q_2 (c_1 - c_2)}, \quad (4.37)$$

что обеспечит совпадение осей жесткости с осями возбуждения. С другой стороны, если упругий подвес проектируется равножестким ($c_1 = c_2$), но из-за погрешностей изготовления упругих элементов подвеса равенство жесткостей не выполняется, то специальным введением перекоса на известный угол θ и измерением амплитуды колебаний инерционной массы при нулевой угловой скорости можно при помощи формулы (4.37) определить величину несовпадения жесткостей.

4.5. Перекрестная чувствительность гироскопа

Для исследования динамики микромеханического вибрационного гироскопа с дополнительной рамкой представляет интерес изучение

измерительных свойств чувствительного элемента с точки зрения его чувствительности к составляющим вектора переносной угловой скорости, которые лежат в плоскости датчика. Рассмотрим случай, когда постоянный вектор переносной угловой скорости ориентирован в пространстве произвольным образом, то есть $\vec{\Omega} = \{\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3\}$. Поведение чувствительного элемента гироскопа в этом случае описывается системой дифференциальных уравнений (3.8) при $q_1 = 0$. Колебания чувствительного элемента по координатам x_1 и x_2 при гармоническом возбуждении $q_2(t) = q_2 \cos(\omega t)$ с частотой ω будем искать в виде (3.16). После подстановки выражений (3.16) в систему (3.8) и последующего упрощения получаем систему алгебраических уравнений относительно комплексных амплитуд \bar{A}_1 и \bar{A}_2 :

$$\begin{cases} (k_1^2 - \Omega_3^2 - \Omega_2^2 - \omega^2 + 2h_1 i \omega) \bar{A}_1 - (2\Omega_3 i \omega - \Omega_1 \Omega_2) \bar{A}_2 = 0, \\ (2d\Omega_3 i \omega + d\Omega_1 \Omega_2) \bar{A}_1 + (k_2^2 - \Omega_3^2 - \Omega_1^2 - \omega^2 + 2h_2 i \omega) \bar{A}_2 = q_2. \end{cases} \quad (4.38)$$

Решение системы (4.38) относительно комплексных амплитуд будет

$$\bar{A}_1 = \frac{q_2 (2\Omega_3 i \omega - \Omega_1 \Omega_2)}{\bar{\Delta}(\omega)}, \quad \bar{A}_2 = \frac{q_2 (k_1^2 - \Omega_3^2 - \Omega_2^2 - \omega^2 + 2h_1 i \omega)}{\bar{\Delta}(\omega)},$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}(\omega) = & (k_1^2 - \Omega_3^2 - \Omega_2^2 - \omega^2)(k_2^2 - \Omega_3^2 - \Omega_1^2 - \omega^2) - 4h_1 h_2 - d(\Omega_1^2 \Omega_2^2 + 4\omega^2 \Omega_3^2) + \\ & + 2i\omega [h_1(k_2^2 - \Omega_3^2 - \Omega_1^2 - \omega^2) + h_2(k_1^2 - \Omega_3^2 - \Omega_2^2 - \omega^2)]. \end{aligned}$$

При произвольной ориентации вектора измеряемой переносной угловой скорости получаем следующую амплитуду выходных колебаний чувствительного элемента:

$$A_1 = \frac{q_2 \sqrt{4\Omega_3^2 \omega^2 + \Omega_1^2 \Omega_2^2}}{\Delta}, \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} \Delta^2 = & [(k_1^2 - \Omega_3^2 - \Omega_2^2 - \omega^2)(k_2^2 - \Omega_3^2 - \Omega_1^2 - \omega^2) - 4h_1 h_2 - d(\Omega_1^2 \Omega_2^2 + 4\omega^2 \Omega_3^2)]^2 + \\ & + 4\omega^2 [h_1(k_2^2 - \Omega_3^2 - \Omega_1^2 - \omega^2) + h_2(k_1^2 - \Omega_3^2 - \Omega_2^2 - \omega^2)]^2. \end{aligned}$$

Выделим в полученном выражении (4.39) полезную и вредную составляющие: $A_1 \approx A_{1(3)} + A_{1(12)}$. Полезной будем считать часть амплитуды $A_{1(3)}$, определяемую составляющей переносной угловой скорости Ω_3 , которая перпендикулярна плоскости прибора. Чувствительность по другим направлениям, представленную как часть $A_{1(12)}$, будем считать вредной. Разложим числитель формулы (4.39) в ряд Макларена и удержим первые два члена этого разложения. После подстановки полученного приближенного представления в выражение (4.39) получаем формулы для полезной и вредной составляющих амплитуды выходного сигнала:

$$A_{1(3)} = \frac{2q_2\omega}{\Delta} \Omega_3, \quad (4.40)$$

$$A_{1(12)} = \frac{q_2\Omega_1\Omega_2^2}{4\omega\Omega_3\Delta} \quad (\Omega_3 \neq 0), \quad A_{1(12)} = \frac{q_2\Omega_1\Omega_2}{\Delta_0} \quad (\Omega_3 = 0),$$

где

$$\Delta_0^2 = \left[(k_1^2 - \Omega_2^2 - \omega^2)(k_2^2 - \Omega_1^2 - \omega^2) - 4h_1h_2 - d\Omega_1^2\Omega_2^2 \right]^2 + 4\omega^2 \left[h_1(k_2^2 - \Omega_1^2 - \omega^2) + h_2(k_1^2 - \Omega_2^2 - \omega^2) \right]^2.$$

Полученные выражения (4.40) позволяют оценить погрешность измерения составляющей, перпендикулярной плоскости прибора, произвольно ориентированного в инерциальном пространстве вектора переносной угловой скорости. Отношение вредной составляющей амплитуды выходных колебаний инерционной массы $A_{1(12)}$ к полезной $A_{1(3)}$ при ненулевой угловой скорости будет иметь вид

$$\delta A_{(12)} = \frac{A_{1(12)}}{A_{1(3)}} = \frac{\Omega_1^2\Omega_2^2}{8\omega^2\Omega_3^2}. \quad (4.41)$$

Из полученного выражения (4.41) видно, что если рабочая частота возбуждения ω выбрана значительно больше измеряемой переносной угловой скорости (что имеет место на практике), то

$$\delta A_{(12)} \approx O\left(\frac{\Omega^2}{\omega^2}\right) \ll 1,$$

и относительная погрешность будет составлять порядка 0,1% от полезного сигнала. Для датчиков угловой скорости низкой точности такой уровень перекрестной чувствительности вполне допустим. Однако, если требуется повысить точность проектируемого гироскопа, то перекрестная чувствительность должна быть учитываться при разработке прибора и его использовании. Диаграмма перекрестной чувствительности микромеханического вибрационного гироскопа с дополнительной рамкой аналогична диаграмме на рис. 2.15. Анализируя диаграмму видим, что максимальной вредная составляющая от перекрестной чувствительности будет в случае, когда проекция вектора переносной угловой скорости на плоскость чувствительного элемента будет направлена вдоль биссектрис координатных углов. Исключение погрешности от перекрестной чувствительности гироскопа можно реализовать алгоритмическими методами с использованием информации от других аналогичных датчиков, которые измеряют остальные компоненты угловой скорости. Другим способом может быть использование второго аналогичного датчика (датчика, который измеряет ту же самую компоненту вектора угловой скорости), но развернутого в плоскости X_1X_2 на 45° по отношению к первому для реализации разностного измерения. Выбор указанной выше совместной ориентации датчиков следует из анализа диаграммы перекрестной чувствительности.

4.6. Погрешность от дебаланса инерционной массы

В рассматривавшейся ранее математической модели чувствительного элемента микромеханического вибрационного гироскопа с дополнительной рамкой принималось, что вектор измеряемой переносной угловой скорости проходит через начало системы координат $OX_1X_2X_3$. Пусть теперь расстояние от вектора переносной угловой скорости до положения центра

масс инерционной массы в состоянии покоя задается вектором $\vec{r}_1 = \{r_{11}, r_{12}, r_{13}\}$, а положение центра масс рамки вектором $\vec{r}_2 = \{r_{21}, r_{22}, r_{23}\}$. Тогда уравнения движения чувствительного элемента гироскопа на вращающемся с угловой скоростью $\vec{\Omega} = \{\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3\}$ основании будут:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2h_1\dot{x}_1 + (k_1^2 - \Omega_2^2 - \Omega_3^2)x_1 - 2\Omega_3\dot{x}_2 + (\Omega_1\Omega_2 - \dot{\Omega}_3)x_2 + \\ + r_{12}(\Omega_1\Omega_2 - \dot{\Omega}_3) + r_{13}(\Omega_1\Omega_3 + \dot{\Omega}_2) - r_{11}(\Omega_2^2 + \Omega_3^2) = q_1, \\ \ddot{x}_2 + 2h_2\dot{x}_2 + (k_2^2 - \Omega_1^2 - \Omega_3^2)x_2 + 2d\Omega_3\dot{x}_1 + d(\Omega_1\Omega_2 + \dot{\Omega}_3)x_1 + \\ + d[r_{11}(\Omega_1\Omega_2 + \dot{\Omega}_3) - r_{12}(\Omega_2^2 + \Omega_3^2) + r_{13}(\Omega_2\Omega_3 - \dot{\Omega}_1)] + \\ + (1-d)[r_{21}(\Omega_1\Omega_2 + \dot{\Omega}_3) - r_{22}(\Omega_2^2 + \Omega_3^2) + r_{23}(\Omega_2\Omega_3 - \dot{\Omega}_1)] = q_2. \end{cases} \quad (4.42)$$

Когда дебаланс отсутствует, а расстояние от начала координат до оси переносного вращения задается вектором \vec{r} , то в этом случае $\vec{r}_1 = \vec{r}_2 = \vec{r}$, где $\vec{r} = \{r_1, r_2, r_3\}$. Если в системе (4.42) принять, что угловая скорость постоянна и направлена вдоль оси X_3 и по координате x_1 не действуют никакие внешние силы, то $\vec{\Omega} = \{0, 0, \Omega\}$, $q_1 = 0$ и уравнения преобразуются к виду

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2h_1\dot{x}_1 + (k_1^2 - \Omega^2)x_1 - 2\Omega\dot{x}_2 = r_1\Omega^2, \\ \ddot{x}_2 + 2h_2\dot{x}_2 + (k_2^2 - \Omega^2)x_2 + 2d\Omega\dot{x}_1 = q_2 + r_2\Omega^2. \end{cases} \quad (4.43)$$

Частные решения системы (4.43) от постоянных воздействий, которые пропорциональны квадратам переносной угловой скорости, вычисляются по формулам

$$x_j = \frac{r_j\Omega^2}{k_j^2 - \Omega^2} \approx const, \quad (j = 1, 2). \quad (4.44)$$

В случае произвольной ориентации вектора переносной угловой скорости $\vec{\Omega} = \{\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3\}$ постоянные смещения инерционной массы по координатам x_1 и x_2 определяются при помощи следующих соотношений:

$$x_1 = \frac{f_1(k_2^2 - \Omega_1^2 - \Omega_3^2) - f_2\Omega_1\Omega_2}{(k_1^2 - \Omega_2^2 - \Omega_3^2)(k_2^2 - \Omega_1^2 - \Omega_3^2) - \Omega_1^2\Omega_2^2},$$

$$x_2 = \frac{f_2(k_1^2 - \Omega_2^2 - \Omega_3^2) - f_1\Omega_1\Omega_2}{(k_1^2 - \Omega_2^2 - \Omega_3^2)(k_2^2 - \Omega_1^2 - \Omega_3^2) - \Omega_1^2\Omega_2^2},$$

$$f_1 = r_1(\Omega_2^2 + \Omega_3^2) - \Omega_1(r_2\Omega_2 + r_3\Omega_3),$$

$$f_2 = r_2(\Omega_1^2 + \Omega_3^2) - \Omega_2(r_1\Omega_1 + r_3\Omega_3).$$

Рассмотрим теперь дебаланс инерционной массы чувствительного элемента. В этом случае $\vec{r}_2 = 0$, а $\vec{r}_1 = \vec{r} = \{r_1, r_2, r_3\}$. При постоянной угловой скорости $\vec{\Omega} = \{0, 0, \Omega\}$ смещения чувствительного элемента по координатам x_1 и x_2 будут определяться соотношениями

$$x_1 = \frac{r_1\Omega^2}{k_1^2 - \Omega^2} \approx const, \quad x_2 = \frac{dr_2\Omega^2}{k_2^2 - \Omega^2} \approx const.$$

Полученные формулы сходны с полученными ранее выражениями (4.44). Выражения для смещений инерционной массы от несовпадения положения центра масс чувствительного элемента в состоянии покоя с осью переносного вращения и от дебаланса позволяют сделать вывод, что в виду постоянства этих смещений они могут быть устранены из выходного сигнала при помощи его фильтрации на частоте возбуждения.

4.7. Влияние изменений температуры на динамику чувствительного элемента

Одной из основных причин смещения парциальных частот является нестабильность температуры окружающей чувствительный элемент среды. Изменение температуры среды приводит к изменению температуры элементов прибора. При равномерном прогреве чувствительного элемента изменяются жесткости элементов упругих подвесов. Основной причиной изменения величины парциальной частоты является изменение модуля упругости материала упругого элемента:

$$E = E_0(1 + \alpha_E \Delta T), \quad (4.45)$$

где α_E - температурный коэффициент модуля упругости материала; ΔT - изменение температуры; E_0 - значение модуля упругости материала при

начальной температуре. Суммарная жесткость упругого подвеса инерционной массы или рамки для четырех упругих элементов с учетом (4.45) может быть посчитана по формуле

$$c = \frac{48EI}{l^3} = \frac{48E_0I}{l^3}(1 + \alpha_E \Delta T) = c_0(1 + \alpha_E \Delta T). \quad (4.46)$$

Таким образом, коэффициент температурного изменения коэффициентов жесткостей чувствительного элемента численно равен температурному коэффициенту модуля упругости материала. С учетом (4.46) парциальные частоты чувствительного элемента могут быть представлены в виде

$$k_j^2 = \frac{c_j}{m_j} = \frac{c_{j0}}{m_j}(1 + \alpha_E \Delta T) = k_{j0}^2(1 + \alpha_E \Delta T). \quad (4.47)$$

Выражения (4.47) подставим в формулу (3.20) для амплитуды A_1 выходных колебаний чувствительного элемента. Для малых изменений температуры ($\Delta T^2 \rightarrow 0$) амплитуда A_1 может быть разложена в ряд по степеням ΔT и представлена в виде

$$A_1 \approx A_{10}(1 + \alpha_{A1} \Delta T), \quad (4.48)$$

где коэффициент температурного изменения амплитуды выходных колебаний чувствительного элемента α_{A1} для малых угловых скоростей вычисляется по формуле

$$\alpha_{A1} = \alpha_E \left[\frac{k_1^2(\omega^2 - k_1^2)}{(k_1^2 - \omega^2)^2 + 4h_1^2\omega^2} + \frac{k_2^2(\omega^2 - k_2^2)}{(k_2^2 - \omega^2)^2 + 4h_2^2\omega^2} \right]. \quad (4.49)$$

График для коэффициента α_{A1} в зависимости от частоты возбуждения изображен на рис. 3.14. Очевидно, что коэффициент α_{A1} обращается в ноль на трех некоторых частотах. Крайние из этих частот отличаются от парциальных не более чем на 5%. Таким образом, в области частот, близких к парциальным, можно выбрать частоту возбуждения такую, что влияние температурных изменений жесткости на точность измерения угловой скорости будут несущественны. Точные значения таких частот могут быть легко рассчитаны численно. Другим проявлением влияния

изменения температуры окружающей чувствительный элемент среды на его динамику является изменение динамической вязкости газа, что приводит к изменению демпфирования в системе. Зависимость коэффициента демпфирования от температуры имеет вид

$$h = h_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^\mu, \quad (4.50)$$

где h и h_0 - коэффициенты демпфирования при температурах T и T_0 соответственно; μ - константа, которая для водорода составляет $\mu = 0,678$.

Если положить $T = T_0 + \Delta T$, то для малых изменений температуры ΔT

$$h \approx h_0 (1 + \alpha_h \Delta T), \quad (4.51)$$

где $\alpha_h = \mu/T_0$ - температурный коэффициент для демпфирования.

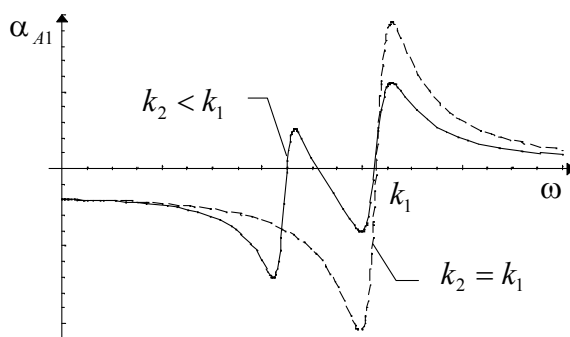


Рис. 4.3. Коэффициент температурного изменения амплитуды A_1

На основании (4.51) представим коэффициенты демпфирования в формулах (3.20) в виде

$$h_j = h_{j0} (1 + \alpha_h \Delta T), \quad j = 1, 2. \quad (4.52)$$

Тогда амплитуда выходных колебаний инерционной массы представляется зависимостью

$$A = A_0 (1 + \alpha_A \Delta T), \quad (4.53)$$

где A_0 - определяется по формулам (3.20), а α_A - температурный коэффициент для амплитуды колебаний инерционной массы, который определяется по формуле

$$\alpha_A = -\frac{4\alpha_h\omega^2}{\Delta_0^2} \left[8d\omega^2\Omega^2 h_{10}h_{20} + h_{20}^2(\omega^2 + \Omega^2 - k_1^2)^2 + h_{10}^2(8\omega^2 h_{20}^2 + (\omega^2 + \Omega^2 - k_2^2)^2) \right] \quad (4.54)$$

График зависимости коэффициента α_A от частоты возбуждения показан на рис. 4.4. Очевидно, что вблизи собственных частот системы наблюдается максимум чувствительности ее к температурным изменениям демпфирования.

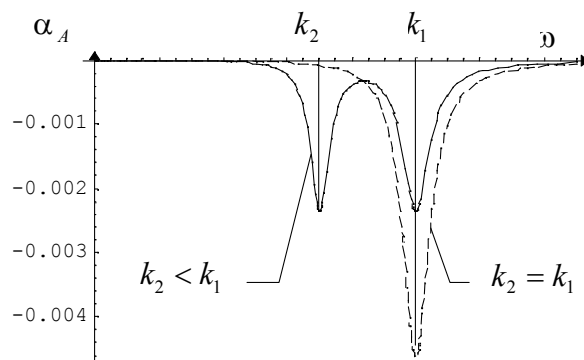


Рис. 4.4. Зависимость температурного коэффициента α_A от частоты возбуждения

Численный анализ экстремумов зависимости α_A от частоты ω показал, что значения частоты возбуждения, соответствующие максимумам чувствительности амплитуды колебаний инерционной массы к температурным изменениям в демпфировании, отличаются от парциальных частот не более, чем на 0,2%. Приведенный выше анализ температурных погрешностей показал, что основным их источником является изменение демпфирования чувствительного элемента. Это говорит о необходимости заполнять чувствительный элемент газом с низким уровнем температурных изменений его свойств.

Рассмотрим теперь одновременное влияние температурных изменений демпфирования, заданных в виде (4.52), и коэффициентов жесткости в виде (4.47). После подстановки этих выражений в формулу (3.20) можем

выделить относительную погрешность измерения угловой скорости, вызванную изменениями температуры

$$\delta\Omega = \Delta T \left\{ -2\alpha_h + \frac{(\delta k^2 - \delta\omega^2)[(\alpha_h - \alpha_k)\delta k^2 - \alpha_h\delta\omega^2]}{\delta k^4 + \delta\omega^4 + 2\delta k^2\delta\omega^2(2\zeta^2 - 1)} + \frac{(\delta\omega^2 - 1)[\alpha_k + \alpha_h(\delta\omega^2 - 1)]}{1 + \delta\omega^4 + 2\delta\omega^2(2\zeta^2 - 1)} \right\}, \quad (4.55)$$

где ΔT - изменения температуры в градусах, α_h и α_k - коэффициенты температурного изменения демпфирования и жесткости соответственно, ζ - относительный коэффициент демпфирования, $\delta k = k_1/k_2$ - отношение парциальных частот чувствительного элемента, $\delta\omega = \omega/k_2$ - отношение частоты возбуждения к парциальной частоте первичных колебаний. Анализ выражения (4.55) показал, что для заданного значения коэффициента температурного изменения α_k может быть рассчитано такое значение α_h , которое обращает в ноль относительную погрешность $\delta\Omega$:

$$\alpha_h^* = -\alpha_k \frac{(\delta k^2 - \delta\omega^2)(\delta\omega^2 - 1)[\delta\omega^2 + \delta k^2(\delta\omega^2 - 2)] + 4\delta k^2\delta\omega^2\zeta^2(1 + \delta k^2 - 2\delta\omega^2)}{8\delta k^2\delta\omega^2\zeta^2[1 + \delta\omega^4 + 2(2\zeta^2 - 1)]}.$$

Согласно зависимости (4.50) мы можем варьировать значение температурного коэффициента α_h при помощи выбора рабочего начального значения температуры T_0^* :

$$T_0^* = \frac{\mu}{\alpha_h^*}. \quad (4.56)$$

Таким образом, выбирая рабочее значение температуры в соответствии с (4.56), можно значительно снизить требования к температурной стабилизации прибора. Например, стабилизация температуры на уровне $T_0^* = 50 \pm 1^\circ C$ снижает относительную погрешность измерения угловой скорости до уровня $\delta\Omega < 0,01$.

4.8. Выводы

Анализ погрешностей одномассового микромеханического вибрационного гироскопа с дополнительной рамкой позволяет сделать следующие выводы:

- фильтрация регистрируемых вторичных колебаний на рабочей частоте позволяет исключить в информации об угловой скорости погрешности от таких факторов, как поступательное ускорение, поступательная вибрация не на рабочей частоте, дебаланс чувствительного элемента;
- выбор собственной частоты первичных колебаний в качестве рабочей позволяет значительно снизить погрешность от поступательной вибрации на рабочей частоте;
- обеспечение необходимой ширины полосы пропускания по угловой скорости достигается выбором величины рабочей частоты (чем больше частота, тем меньше величина динамической погрешности) и выбором отношения парциальных частот (обычно $\delta k = 1,01 \div 1,05 > 1$);
- перекрестная чувствительность для рассмотренной схемы чувствительного элемента не значительна при $\Omega \ll k_{1,2}$. В противном случае она может исключаться алгоритмически по информации от трех микромеханических гироскопов на основании полученных формул для расчета полезных и вредных составляющих в выходном сигнале;
- погрешность от несовпадения упругих и измерительных осей отсутствует у приборов с равножестким подвесом;
- для уменьшения влияний изменений температуры на точность измерения угловой скорости необходимо использовать систему температурной стабилизации, у которой рабочая точка вычисляется по полученным соотношениям.

5. ВОПРОСЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ОДНОМАССОВЫХ МИКРОМЕХАНИЧЕСКИХ ГИРОСКОПОВ

5.1. Функциональные схемы микромеханических вибрационных гироскопов

Результаты исследований динамики чувствительных элементов одномассовых вибрационных гироскопов говорят о необходимости присутствия определенных функциональных элементов в приборе. Рассмотрим основные вопросы построения датчика угловых скоростей на базе одномассового вибрационного чувствительного элемента. Прибор может быть построен по схеме прямого измерения (разомкнутая схема) и схеме с компенсационной обратной связью. В разомкнутой схеме отсутствует система, которая создает силу, действующую на инерционную массу в направлении измеряемой координаты. Принцип прямого измерения заключается в следующем. Системой возбуждения вызываются первичные колебания чувствительного элемента по одной из координат (например x_2). Это могут быть как автоколебания, так и вынужденные колебания в резонансе. Из-за сил Кориолиса происходит возбуждение вторичных колебаний инерционной. Эти колебания регистрируются. После этого происходит выделение их амплитуды. Сигнал, пропорциональный амплитуде вторичных колебаний, будет пропорционален и измеряемой угловой скорости вращения основания, и будет являться выходным сигналом прибора в целом. При этом не происходит формирования каких-либо воздействий на колебания чувствительного элемента на основании регистрируемой информации о них. Такая схема является наиболее простой в реализации. Если информация о вторичных колебаниях чувствительного элемента используется для создания силы, которая их

изменяет, то речь идет о схеме измерения с обратной связью. В этом случае на инерционную массу в направлении координаты x_1 действует сила $q_1(t, x_1)$, зависящая от регистрируемых вторичных колебаний. Если сила q_1 пропорциональна скорости \dot{x}_1 , то происходит уменьшение (компенсация) амплитуды вторичных колебаний чувствительного элемента. При этом выходным становится сигнал в контуре обратной связи, а не сигнал, пропорциональный регистрируемым колебаниям.

Микромеханический вибрационный гироскоп может быть выполнен как в аналоговом, так и в цифровом виде. Элементная база аналоговой электроники имеет некоторые ограничения с точки зрения миниатюризации. Исполнение сервисной электроники в цифровом виде позволяет значительно миниатюризировать всю конструкцию и не использовать гибридные платы. Кроме этого, при интеграции датчиков угловых скоростей в навигационные комплексы желательно, чтобы они имели цифровой выход. Это приводит к необходимости использовать цифровую элементную базу для сервисной электроники.

Рассмотрим устройство и работу вибрационного микромеханического гироскопа прямого измерения по его принципиальной функциональной схеме, приведенной на рис. 5.1. Здесь введены следующие обозначения:

- У1, У2 - выходной и входной усилители;
- СВ - электростатическая система возбуждения;
- ЧЭ - чувствительный элемент вибрационного гироскопа;
- СС - емкостная система регистрации колебаний;
- Ф - полосовой фильтр;
- ДМ - демодулятор;

Постоянство амплитуды первичных колебаний в схеме на рис. 5.1 обеспечивается по принципу автогенератора. При подаче опорного напряжения на усилитель У1 идет переходной процесс, который вызывает

полигармоническое возбуждение чувствительного элемента при помощи гребенчатых структур. Наиболее существенные колебания чувствительного элемента возникают на собственной частоте первичных колебаний. Эти колебания регистрируются и подаются на вход усилителя У1. Таким образом чувствительный элемент выступает в качестве частото задающего элемента.

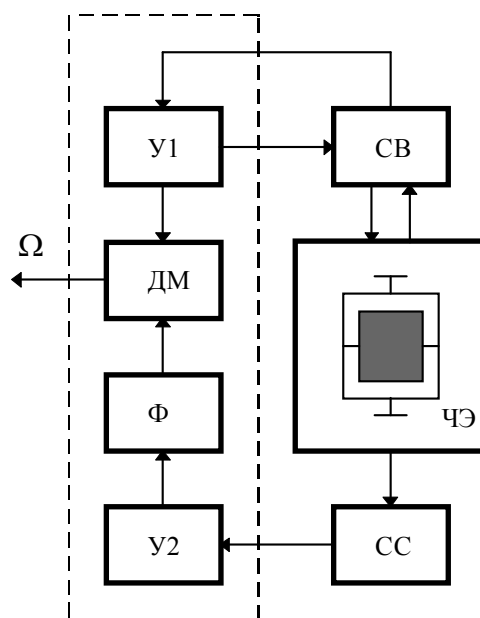


Рис. 5.1. Функциональная схема гироскопа прямого измерения

Гребенчатые структуры создают электростатическую силу, пропорциональную подаваемому напряжению. Под влиянием вращения основания появляются вторичные колебания чувствительного элемента. Эти колебания регистрируются емкостной системой съема СС. Напряжение с системы съема преобразуется блоком усилителей У2 до уровня, необходимого для подачи на вход фильтра Ф. Напряжение, пропорциональное вторичным колебаниям чувствительного элемента, фильтруется для выделения сигнала в области рабочей частоты возбуждения. Отфильтрованное гармоническое напряжение подается на вход демодулятора для выделения амплитуды и формирования напряжения, пропорционального угловой скорости вращения основания. После этого напряжение, пропорциональное угловой скорости, может

подаваться на вход аналогово-цифрового преобразователя для формирования цифрового выхода.

Рассмотренная выше функциональная схема является простейшей схемой вибрационного гироскопа прямого измерения. Чувствительность вибрационных гироскопов к угловой скорости вращения основания сильно зависит от выполнения условий резонанса чувствительного элемента. Для приведения собственной частоты в резонанс с частотой возбуждения может использоваться и позиционная обратная связь, пропорциональная фазе первичных или вторичных колебаний чувствительного элемента. Увеличение диапазона измеряемых угловых скоростей, повышение быстродействия и чувствительности микромеханического гироскопа достигается использованием скоростной обратной связи, которая уменьшает амплитуду вторичных колебаний чувствительного элемента. Функциональная схема такого компенсационного гироскопа приведена на рис. 5.2.

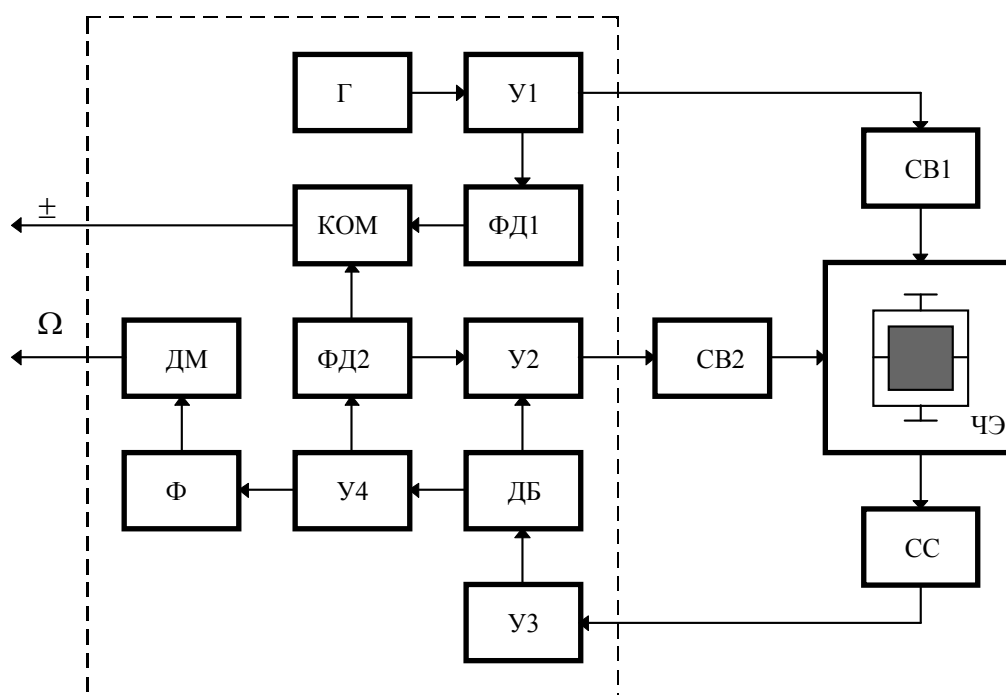


Рис. 5.2. Функциональная схема компенсационного гироскопа

На рис. 5.2, по сравнению с обозначениями на рис. 5.1, добавлены следующие обозначения

Г	- генератор для создания гармонического напряжения;
СВ1	- электростатическая система возбуждения первичных колебаний;
СВ2	- система, действующая на инерционную массу;
У1 - У4	- согласующие и усилительные блоки;
ДБ	- дифференцирующий блок;
ФД1, ФД2	- фазовые дискриминаторы для входного и выходного сигналов;
КОМ	- компаратор.

Гармоническое напряжение из блока генератора Г подается на блок усилителей У1 для достижения уровня, необходимого для подачи на гребенчатые структуры системы возбуждения СВ и фазовый дискриминатор ФД1. В случае компенсационного вибрационного гироскопа сигнал, регистрируемый системой съема, подается на согласующий усилитель У3. Далее этот сигнал дифференцируется в блоке ДБ и подается на вход усилительно-суммирующего блока У2. Там сигнал суммируется с позиционным сигналом, пропорциональным фазе и вместе они подаются на электростатический датчик силы СВ2, действующий непосредственно на инерционную массу. Другой выход дифференцирующего блока связан с выходным каскадом фильтра и демодулятора. Сигнал, пропорциональный фазе вторичных колебаний чувствительного элемента, подается на компаратор КОМ, на другой вход которого подается сигнал, пропорциональный фазе входного напряжения. На компараторе происходит формирование сигнала, пропорционального разности фаз входного и выходного напряжений. Если разность фаз равна нулю, то угловая скорость вращения основания положительна. При отрицательной измеряемой угловой скорости разность фаз будет π .

5.2. Расчет гребенчатого двигателя

Одним из основных элементов системы возбуждения микромеханических гироскопов является гребенчатый двигатель. Рассмотрим математическую модель функционирования такого двигателя и методы оптимального выбора его параметров. Создание электростатической силы, действующей на чувствительный элемент, основано на взаимодействии заряженных поверхностей. Гребенчатый двигатель состоит из двух гребенчатых структур - одна расположена на основании прибора (неподвижная), а другая на чувствительном элементе (подвижная). На неподвижную часть двигателя подается разность потенциалов $\Delta\varphi$, которая изменяется по задаваемому закону. Разность потенциалов создает поверхностный заряд $q = \sigma S$, где σ - поверхностная плотность зарядов, S - площадь поверхности. В общем случае к подвижной части гребенчатой структуры прикладывается разность потенциалов $\Delta\varphi_0$, которая постоянна, и вследствие чего на поверхности подвижной части возникает заряд q_0 . Гребенчатая структура состоит из набора вертикальных заряженных пластин (рис.5.3).

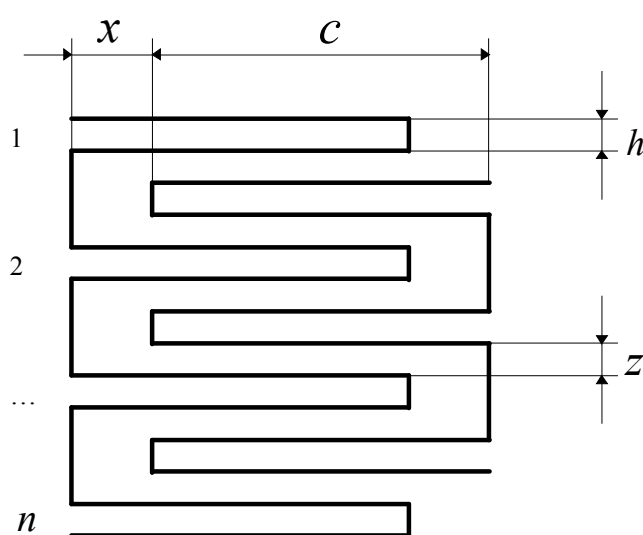


Рис. 5.3. Гребенчатая структура

Применение подобной конструкции позволяет увеличить эффективную площадь и повысить устойчивость. Найдем продольную проекцию силы взаимодействия между двумя заряженными пластинами. Вся конструкция состоит из n пар таких пластин. Пластины будем рассматривать как системы с равномерно распределенными по поверхности зарядами. Для вектора поля напряженности \vec{E} , создаваемого пластиной с плотностью заряда σ , необходимо знать лишь его проекцию на ось, вдоль которой действует сила возбуждения. Эта составляющая вычисляется как

$$E_{x1} = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \int_S \frac{r_{x1}\sigma_1 ds}{r^3},$$

где r - модуль радиус-вектора $\vec{r} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$, соединяющего точку (x_1, y_1, z_1) на поверхности пластины и произвольную точку пространства (x_2, y_2, z_2) , для которой вычисляется значение \vec{E} . Если ширина пластины равна $2b$, а ее длина равна c , то

$$E_{x1}(x_2, y_2, z_2) = \frac{\sigma_1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \int_{-b}^b \int_0^c \frac{(x_2 - x_1) dx_1 dy_1}{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{3/2}}. \quad (5.1)$$

Сила, создаваемая парой пластин гребенчатой структуры будет

$$F_1(x) = \int_{-b}^b \int_x^{x+c} E_{x1}(x_2, y_2, z_2) \sigma_2 dx_2 dy_2. \quad (5.2)$$

Здесь x - зазор между гребенчатыми структурами, показанный на рис. 5.3. Окончательное выражение для силы, создаваемой гребенчатой структурой из n пар пластин, и полученное после интегрирования (5.2), будет

$$F_1(x) = \frac{n\epsilon\epsilon_0}{2\pi h^2} \Psi(x) U_1 U_0, \quad (5.3)$$

где U_1 и U_0 - напряжения, подаваемые на неподвижную и подвижную части конструкции. Когда применяется заземление подвижной части системы возбуждения, что имеет место на практике, то $U_1 = U_0 = U$ и действующая на чувствительный элемент сила будет определяться по формуле

$$F_1(x) = \frac{n\varepsilon\varepsilon_0}{2\pi h^2} \Psi(x) U^2.$$

Здесь $\Psi(x)$ - функция, определяемая по следующей формуле:

$$\begin{aligned} \Psi(x) = & 4bx \ln \left(\frac{2b + \sqrt{4b^2 + z^2 + x^2}}{\sqrt{4b^2 + z^2 + x^2} - 2b} \right) + 2x \left(\sqrt{4b^2 + z^2 + x^2} - \sqrt{z^2 + x^2} \right) + \\ & + 2b(x-c) \ln \left(\frac{-2b + \sqrt{4b^2 + z^2 + (x-c)^2}}{2b + \sqrt{4b^2 + z^2 + (x-c)^2}} \right) + 2b(x+c) \ln \left(\frac{-2b + \sqrt{4b^2 + z^2 + (x+c)^2}}{2b + \sqrt{4b^2 + z^2 + (x+c)^2}} \right) + \\ & + 8b^2 \ln \left(\frac{x + \sqrt{4b^2 + z^2 + x^2}}{x-c + \sqrt{4b^2 + z^2 + (x-c)^2}} \right) + 8b^2 \ln \left(\frac{x + \sqrt{4b^2 + z^2 + x^2}}{x+c + \sqrt{4b^2 + z^2 + (x+c)^2}} \right) + \\ & + (x-c) \left(\sqrt{4b^2 + z^2 + (x-c)^2} - \sqrt{z^2 + (x-c)^2} \right) + (x+c) \left(\sqrt{4b^2 + z^2 + (x+c)^2} - \sqrt{z^2 + (x+c)^2} \right) + \\ & + (4b^2 + z^2) \ln \left[\frac{\left(x + \sqrt{4b^2 + z^2 + x^2} \right)^2}{\left(x-c + \sqrt{4b^2 + z^2 + (x-c)^2} \right) \left(x+c + \sqrt{4b^2 + z^2 + (x+c)^2} \right)} \right] - \\ & - z^2 \ln \left[\frac{\left(x + \sqrt{x^2 + z^2} \right)^2}{\left(x-c + \sqrt{z^2 + (x-c)^2} \right) \left(x+c + \sqrt{z^2 + (x+c)^2} \right)} \right]. \end{aligned}$$

График функции $\Psi(x)$ представлен на рис. 5.4.

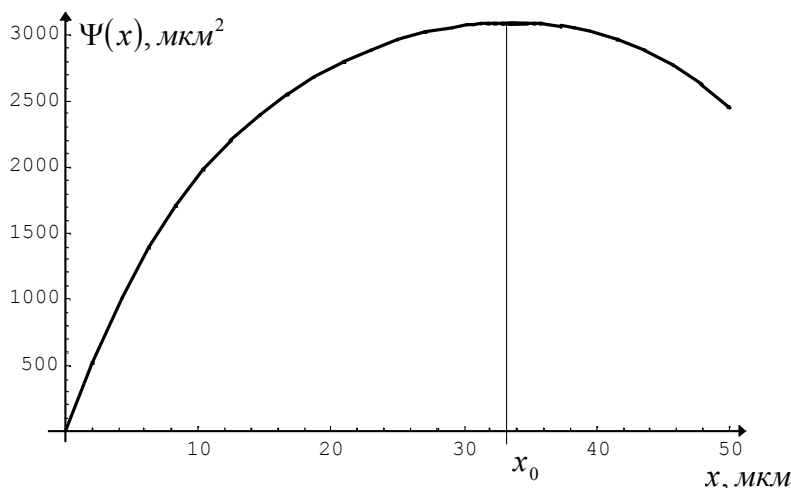


Рис. 5.4. Зависимость $\Psi(x)$ от текущего расстояния x

Он построен для следующих значений параметров гребенчатой конструкции: $c=50$, $h=3$, $b=10$, $z=5$ (все размеры в микронах). Анализ зависимости $\Psi(x)$ показывает, что она имеет максимум при некотором

$x = x_0$. Очевидно, что при начальной установке гребенчатых конструкций с таким зазором будет обеспечена максимальная эффективность работы двигателя. Оптимальное значение может быть легко найдено численно на основании полученной формулы для $\Psi(x)$. Например, для приведенной на рис. 5.4 зависимости $x_0 = 33,617 \text{ мкм}$. поскольку подвод питания к подвижным частям системы возбуждения является затруднительным, то обычно они заземляются. В этом случае гребенчатая структура может обеспечивать только отталкивание своих частей друг от друга. Это означает, что первичные колебания чувствительного элемента будут возбуждаться “толчками”, которые следуют в противофазе.

5.3. Расчет характеристик микромеханических гироскопов

Некоторые из характеристик датчика угловой скорости на микромеханическом гироскопе могут быть рассчитаны на основе параметров конструкции его чувствительного элемента и проведенных исследований динамики и погрешностей вибрационных гироскопов. К таким характеристикам относятся: ширина полосы пропускания по угловой скорости, разрешающая способность, нестабильность масштабного коэффициента, смещение нуля, обусловленное характером движения основания и технологическими погрешностями, диапазон измерения угловой скорости. Для некоторых характеристик может быть решена и обратная задача: исходя из требуемой величины характеристики, определить соответствующие значения параметров конструкции чувствительного элемента.

5.3.1. Нестабильность масштабного коэффициента

Как показывают экспериментальные и теоретические исследования погрешностей микромеханических гироскопов, нестабильность

масштабного коэффициента определяется, в основном, влиянием изменений температуры на чувствительный элемент. Обозначим расчетное значение масштабного коэффициента K_0 . Если в амплитуде измеряемых вторичных колебаний чувствительного элемента A_0 отсутствуют какие-либо погрешности, то измеренное точное значение угловой скорости будет $\Omega_0 = A_0/K_0$. Если какие-либо факторы внесут изменения в амплитуду вторичных колебаний, то измеренная в этом случае угловая скорость будет определяться выражением

$$\Omega = \frac{A_0 + \Delta A}{K_0} = \frac{A_0}{K_0} + \frac{\Delta A}{K_0} = \Omega_0 + \Delta\Omega,$$

где $\Delta\Omega = \Delta A/K_0$. Зададим относительную погрешность измерения угловой скорости $\delta\Omega$ как отношение приращения угловой скорости к ее истинной величине. Она может быть рассчитана по формуле

$$\delta\Omega = \frac{\Delta\Omega}{\Omega_0} = \frac{\Delta A}{K_0} \left(\frac{A_0}{K_0} \right)^{-1} = \frac{\Delta A}{A_0}. \quad (5.5)$$

Таким образом, относительная погрешность измерения угловой скорости может быть определена как отношение приращения амплитуды вторичных колебаний при возмущении к величине этой амплитуды при отсутствии возмущения. Относительная погрешность, вызванная изменениями температуры, рассчитывается по формуле (4.55):

$$\delta\Omega = \Delta T \left\{ -2\alpha_h + \frac{(\delta k^2 - \delta\omega^2)[(\alpha_h - \alpha_k)\delta k^2 - \alpha_h\delta\omega^2]}{\delta k^4 + \delta\omega^4 + 2\delta k^2\delta\omega^2(2\zeta^2 - 1)} + \frac{(\delta\omega^2 - 1)[\alpha_k + \alpha_h(\delta\omega^2 - 1)]}{1 + \delta\omega^4 + 2\delta\omega^2(2\zeta^2 - 1)} \right\}.$$

При помощи формулы (4.55) может быть рассчитана нестабильность масштабного коэффициента при изменении температуры. Рассмотрим численный пример. Возьмем следующие значения параметров чувствительного элемента микромеханического вибрационного гироскопа:

$$\alpha_k = -0,0005; \quad (5.6)$$

$$\alpha_h = 0,0339 \text{ (для водорода при } T = 20^\circ\text{C)};$$

$$\delta k = 1,05;$$

$$\zeta = 0,000025 \text{ (} Q = 20000\text{)};$$

$$\delta\omega = 1 \text{ (резонанс первичных колебаний)}.$$

Для параметров (5.6) чувствительного элемента величина относительной погрешности при $\Delta T = \pm 1$ будет $\delta\Omega \approx \mp 0.0285$ или 2,85%, что соответствует абсолютной погрешности в 1,14 °/с при угловой скорости 40 °/с. При отклонении температуры от уровня $T = 20^\circ\text{C}$ на $\Delta T = \pm 40^\circ\text{C}$ (диапазон температур от -20°C до $+60^\circ\text{C}$) погрешность будет составлять до 114%. Это говорит о необходимости применения температурной стабилизации прибора для повышения его точности. Для обеспечения погрешности измерения угловой скорости менее 1% необходимо обеспечить стабилизацию температуры на уровне $|\Delta T| < 0,35$ градуса. Следует отметить, что с ростом температуры величина коэффициента температурных изменений демпфирования снижается. Так для $T = 50^\circ\text{C}$ необходимый диапазон стабилизации температуры составляет уже $|\Delta T| < 3$. Помимо расчета относительной погрешности измерения угловой скорости при помощи формул (4.55) и (5.5) можно решать задачу выбора параметров чувствительного элемента исходя из требуемой точности.

5.3.2. Смещение нуля у одномассовых гироскопов

Смещение нуля в микромеханических гироскопах определяется, в основном, характеристиками электронной части прибора. С другой стороны, смещение нуля может быть вызвано поступательной вибрацией основания с частотой возбуждения и несовпадением упругих и измерительных осей чувствительного элемента. При поступательной вибрации невращающегося основания на рабочей частоте величина ошибочно измеренной угловой скорости будет определяться соотношением

$$\Delta\Omega = \frac{k w_{10} \sqrt{(\delta\omega^2 - 1)^2 + 4\delta\omega^2 \zeta^2}}{2q_2 \delta\omega}, \quad (5.7)$$

где w_{10} - амплитуда поступательной вибрации вдоль оси чувствительности, k - парциальная частота первичных колебаний, q_2 - амплитуда ускорений от силы возбуждения. При помощи формулы (5.7) может быть рассчитано максимальное допустимое значение амплитуды вибрации для заданного допустимого смещения нуля. Например, для чувствительного элемента с характеристиками (5.6) при $k = 8000$ Гц и $\Delta\Omega_{\max} = 0,05^\circ/c$, допустимая амплитуда ускорения поступательной вибрации на рабочей частоте будет $(w_{10})_{\max} \approx 0,044 м/c^2$. Погрешность от несовпадения упругих и измерительных осей является технологической и должна устраняться в процессе изготовления чувствительного элемента. Максимальный допустимый угол несовпадения указанных осей θ_{\max} рассчитывается по формуле

$$\theta_{\max} = \frac{\Delta\Omega_{\max} k \delta\omega}{\Delta k_1^2} = 2 \frac{m_1 \Delta\Omega_{\max} k \delta\omega}{c_1 - c_2}, \quad (5.8)$$

где m_1 - масса инерционной массы, c_1 и c_2 - жесткости упругого подвеса в направлении первичных и вторичных колебаний.

5.3.3. Ширина полосы пропускания

Диапазон частот гармонических угловых скоростей, которые измеряются с наперед заданной максимальной погрешностью $\delta\Omega_{\max}$ является полосой пропускания по измеряемой угловой скорости. Ширина полосы пропускания рассчитывается по формуле

$$\Delta\Omega = \sqrt{\frac{\delta\Omega_{\max}}{2} \frac{k[\delta k^4 + \delta\omega^4 + 2\delta k^2 \delta\omega^2 (2\zeta^2 - 1)]}{\sqrt{\delta\omega^6 + \delta k^2 (2\zeta^2 - 1)(\delta\omega^4 - \delta k^4) + \delta k^4 \delta\omega^2 (4\zeta^4 - 4\zeta^2 - 1)}}}. \quad (5.9)$$

Кроме этого, для чувствительного элемента с параметрами (5.6) и заданной шириной полосы пропускания можно определить минимальную необходимую парциальную частоту первичных колебаний. Например, для $\delta\Omega_{\max} = 0,01$ и $\Delta\Omega = 80$ Гц парциальная частота будет $k \approx 50314$ Гц.

5.3.4. Разрешающая способность

Получим формулы для расчета разрешающей способности исходя из минимального изменения емкости конденсаторов системы съема ΔC_{\min} , которое определяется техническими характеристиками используемой сервисной электроники. Как правило используется дифференциальная схема измерения по информации с двух обкладок конденсатора, пару которым составляет одна обкладка, закрепленная на инерционной массе. При смещении массы на малую величину δ от начального положения δ_0 емкости конденсаторов с площадью перекрытия S будут изменяться как

$$C_{1,2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{\delta_0 \pm \delta}, \quad (5.10)$$

а их разность ΔC будет определяться зависимостью

$$\Delta C = C_2 - C_1 = \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 S \delta}{\delta_0^2 - \delta^2} \approx \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 S}{\delta_0^2} \delta, \quad (5.11)$$

где ε и ε_0 - относительная диэлектрическая проницаемость газа, окружающего чувствительный элемент и абсолютная диэлектрическая проницаемость вакуума. С другой стороны, смещение δ вычисляется как

$$\delta = K\Delta\Omega. \quad (5.12)$$

Здесь K - коэффициент передачи прибора, который для одномассового вибрационного гироскопа с дополнительной рамкой определяется из формулы (3.20) и при резонансе первичных колебаний ($\omega = k_2 = k_L$) равен

$$K_L = \frac{q_2}{k_L^3 \zeta \sqrt{1 + \delta k^4 + 2\delta k^2 (2\zeta^2 - 1)}}. \quad (5.13)$$

Аналогичный коэффициент для карданового гироскопа будет ($\omega = k_2 = k_R$)

$$K_R = \frac{g_1 m_2 R}{4k_R^3 \zeta \sqrt{1 + \delta k^4 + 2\delta k^2 (2\zeta^2 - 1)}}, \quad (5.14)$$

где R - расстояние от оси вращения до центра пластины электрода системы съема. После подстановки выражений (5.12)-(5.14) в уравнение (5.11) и разрешения относительно $\Delta\Omega$, получаем формулы для расчета

разрешающих способностей карданового гироскопа и одномассового вибрационного гироскопа с дополнительной рамкой:

$$\Delta\Omega_R = \frac{\Delta C_{\min} \delta_0^2 2k_R^3 \zeta \sqrt{1 + \delta k^4 + 2\delta k^2 (2\zeta^2 - 1)}}{\varepsilon \varepsilon_0 S g_1 m_2 R}, \quad (5.15)$$

$$\Delta\Omega_L = \frac{\Delta C_{\min} \delta_0^2 k_L^3 \zeta \sqrt{1 + \delta k^4 + 2\delta k^2 (2\zeta^2 - 1)}}{2\varepsilon \varepsilon_0 S q_2}. \quad (5.16)$$

Чем меньше величины, определяемые по формулам (5.15) и (5.16), тем выше разрешающая способность у рассматриваемого прибора.

5.4. Сравнительный анализ характеристик гироскопов с поступательными и вращательными движениями чувствительных элементов

Проведем анализ и сравнение характеристик микромеханических гироскопов, которые используют поступательные (LL-гироскоп) и вращательные (RR-гироскоп) колебания чувствительных элементов. Используя результаты, изложенные в разделах 2.2 и 3.1, а также формулы (5.13) и (5.14), приравняем амплитуды регистрируемых колебаний чувствительных элементов сравниваемых гироскопов:

$$(A_R = A_L) \Rightarrow \frac{g_1 R^2 m_L}{4k_R^3 J_R} = \frac{1}{k_L^3}. \quad (5.17)$$

Здесь было принято, что расстройка частот у чувствительных элементов одинакова, а $m_2 = q_2 R m_L / J_R$, где m_L - масса чувствительного элемента LL-гироскопа, а J_R - момент инерции RR-гироскопа. Из анализа выражений (5.13) и (5.14) следует, что амплитуда выходных колебаний тем больше, чем меньше рабочая (парциальная) частота чувствительного элемента. Для корректного сравнения измерительных свойств рассматриваемых

гироскопов будем рассматривать минимальную для каждой из схем рабочую частоту при заданных габаритных размерах.

Минимальные частоты. Рассмотрим прямоугольные планарные чувствительные элементы, которые соединяются с основанием следующим образом: для LL-гироскопа при помощи 4-х упругих элементов прямоугольного сечения (рис. 5.5), а для RR-гироскопа - двумя торсионами прямоугольного сечения (рис. 5.6).

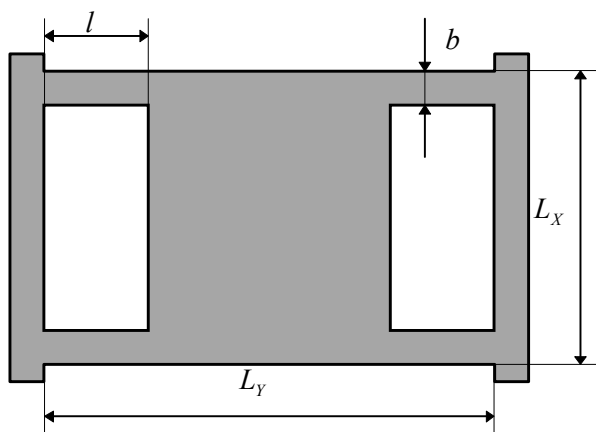


Рис.5.5. Схема LL-гироскопа

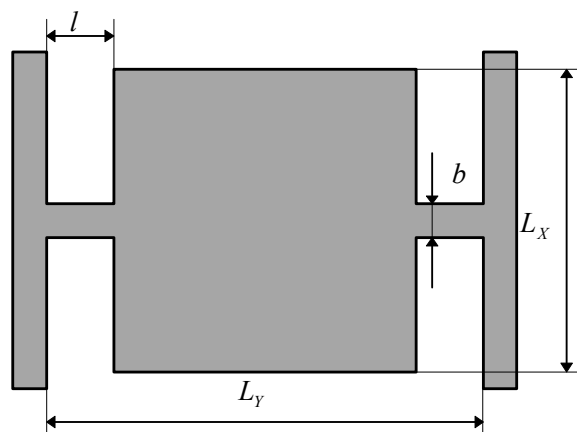


Рис. 5.6. Схема RR-гироскопа

В этом случае для заданных габаритных размеров чувствительного элемента L_x и L_y парциальная частота первичных колебаний LL-гироскопа вычисляется по формуле

$$k_L = 2 \sqrt{\frac{bh^3 E}{\rho l^3 L_x (L_y - 2l)}}, \quad (5.18)$$

где E - модуль Юнга первого рода; ρ - плотность материала; l, b, h - длина, ширина и толщина упругого элемента подвеса. Соответствующая собственная частота RR-гироскопа будет

$$k_R = 2 \sqrt{\frac{4bGh^2}{\rho L_x (h^2 + L_x^2) (L_y - 2l)}}. \quad (5.19)$$

Здесь G - модуль Юнга второго рода. Графики зависимостей частот (5.18) и (5.19) от длины упругого элемента в диапазоне от 0 до $L_y/2$ представлены на рис. 5.7 и рис. 5.8. Из анализа графиков на рис. 5.7 и 5.8

следует, что зависимости (5.18) и (5.19) имеют очевидный минимум. Найдя эти минимумы, приравняв к нулю производные от частот по l , определим оптимальную длину для LL-гироскопа

$$l = \frac{3L_Y}{8}, \quad (5.20)$$

и для RR-гироскопа

$$l = \frac{L_Y}{4}. \quad (5.21)$$

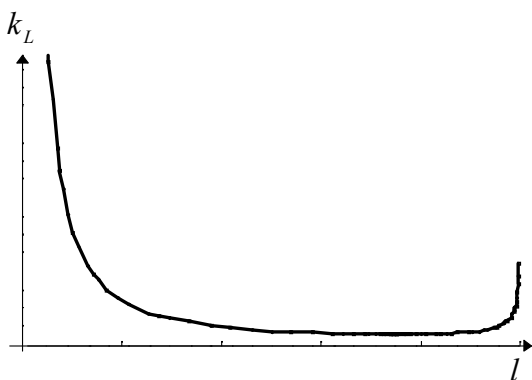


Рис. 5.7. Парциальная частота LL-гироскопа

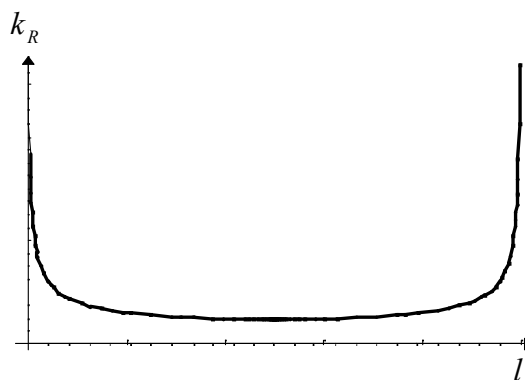


Рис. 5.8. Парциальная частота RR-гироскопа

Подстановки длин (5.20) и (5.21) в выражения (5.18) и (6.19) дает

$$k_L = \frac{64}{3} \sqrt{\frac{4Ebh^2}{9\rho L_X L_Y^4}}, \quad k_R = 8 \sqrt{\frac{Gb h^2}{\rho L_X L_Y^2 (h^2 + L_X^2)}}. \quad (5.22)$$

Формулы (5.22) позволяют вычислить минимальную парциальную частоту для заданных габаритных размеров чувствительных элементов сравниваемых гироскопов.

Анализ габаритных размеров. Подставим зависимости (5.22) в уравнение (5.17) приняв, что чувствительные элементы имеют одинаковые габариты в направлениях X и Y:

$$L_X = L_Y = 2R = L \quad - \text{ для RR-гироскопа,}$$

$$L_X = L_Y = L_0 \quad - \text{ для LL-гироскопа.}$$

Получаем следующее уравнение относительно габаритов сравниваемых чувствительных элементов:

$$\frac{81(h^2 + L^2)}{g_1 L_0^2} \left[\frac{G}{L^3(L^2 + h^2)} \right]^{\frac{3}{2}} = 128\sqrt{6} \left[\frac{E}{L_0^5} \right]^{\frac{3}{2}}. \quad (5.23)$$

Решим уравнение (5.23) относительно габаритного размера чувствительного элемента LL-гироскопа

$$L_0 = 2 \left[\frac{2^4 E^3 g_1^2 L^9 (h^2 + L^2)}{2^4 G^3} \right]^{\frac{1}{11}}. \quad (5.24)$$

График зависимости L_0 от соответствующего габарита чувствительного элемента RR-гироскопа L представлены на рис. 5.9.

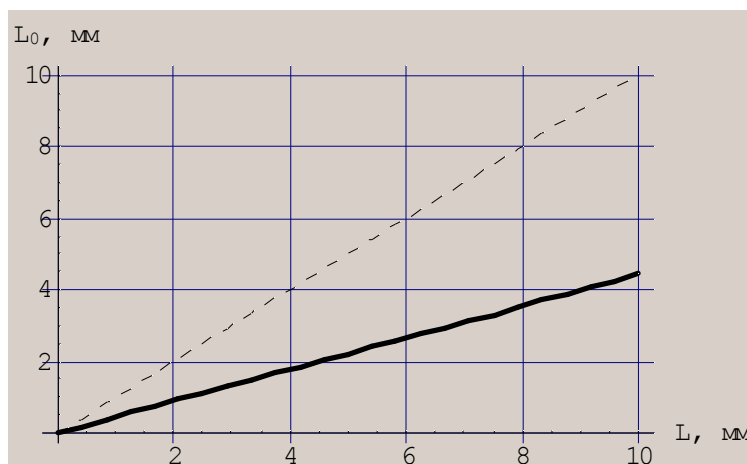


Рис. 5.9. Соотношение габаритных размеров гироскопов

Из анализа графика на рис. 5.9 видно, что одинаковыми измерительными свойствами будут обладать RR-гироскоп с габаритами приблизительно в 2,2 раза большими, чем LL-гироскоп. Таким образом, для обеспечения одинаковой амплитуды регистрируемых выходных колебаний при одинаковой угловой скорости необходимо, чтобы чувствительный элемент RR-гироскопа был по площади примерно в 4 раза больше, чем соответствующий чувствительный элемент LL-гироскопа.

5.5. Выводы

Таким образом с точки зрения проектирования микромеханического датчика угловых скоростей были получены следующие научные и практические результаты:

- выработана функциональная схема прибора с различными принципами возбуждения и измерения колебаний чувствительного элемента, в которой нашли применения рекомендации, полученные в 3-м и 4-м разделах данной работы;
- разработана математическая модель гребенчатого двигателя системы возбуждения и получены расчетные соотношения для его оптимальных параметров;
- получены соотношения для расчета основных характеристик одномассовых микромеханических гироскопов: нестабильности масштабного коэффициента, смещения нуля, ширины полосы пропускания по угловой скорости, разрешающей способности;
- проведен сравнительный анализ характеристик гироскопов с поступательными и вращательными движениями чувствительных элементов, который показал, что для обеспечения одинаковой чувствительности необходимо, чтобы чувствительный элемент RR-гироскопа был по площади примерно в 4 раза больше, чем соответствующий чувствительный элемент LL-гироскопа;
- разработана методика аналитического и численного расчета параметров чувствительного элемента исходя из требуемых характеристик прибора, на основе которой была создана программа автоматического проектирования одномассовых чувствительных элементов с дополнительной рамкой (на языке Mathematica 3.0) (Приложение D).

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенные исследования динамики и погрешностей микромеханических вибрационных гироскопов с поступательным и вращательным движениями чувствительных элементов на вращающемся основании позволили получить следующие новые теоретические результаты, и выработать практические рекомендации:

- ◆ Разработаны и обоснованы математические модели, описывающие движение микромеханического гироскопа на вращающемся основании, которые позволили установить аналитические зависимости амплитуд и фаз первичных и вторичных колебаний чувствительных элементов от частоты возбуждения и измеряемой угловой скорости, получить аналитические зависимости собственных частот гироскопов от переносной угловой скорости. Составлены структурные схемы чувствительных элементов гироскопов прямого измерения и с обратной связью, для которых получены передаточные функции, амплитудно-частотные и фазочастотные характеристики, а также соотношения для анализа качества переходных процессов в огибающих колебаний.
- ◆ Для малых переносных угловых скоростей вращения основания амплитуда вторичных колебаний чувствительного элемента пропорциональна этой угловой скорости. Повышение чувствительности гироскопов к угловой скорости достигается возбуждением первичных колебаний на собственной частоте и снижением этой частоты.
- ◆ Устойчивые колебания чувствительных элементов микромеханических вибрационных гироскопов происходят при значениях угловой скорости, меньших парциальной частоты первичных колебаний по абсолютной величине. Использование скоростной компенсационной обратной связи

значительно повышает быстродействие гироскопов и увеличивает диапазон измеряемых угловых скоростей.

- ◆ Исследование погрешностей микромеханических вибрационных гироскопов кардановой, камертонной и одномассовых схем показало, что фильтрация регистрируемых вторичных колебаний на рабочей частоте позволяет исключить в информации об угловой скорости погрешности от поступательного ускорения, поступательной вибрации не на рабочей частоте, дебаланса чувствительного элемента. Выбор собственной частоты первичных колебаний в качестве рабочей позволяет значительно снизить погрешность от поступательной вибрации основания на рабочей частоте, а необходимая ширина полосы пропускания достигается выбором величины рабочей частоты и отношения парциальных частот первичных и вторичных колебаний. Перекрестная чувствительность для кардановой и одномассовых схем чувствительных элементов не значительна (при $\Omega \ll k_{1,2}$). Погрешность от несовпадения упругих и измерительных осей отсутствует у приборов с равножестким подвесом. Уменьшение влияний изменений температуры на точность измерения угловой скорости достигается использованием системы температурной стабилизации, рабочая точка которой вычисляется по полученным в работе соотношениям. Воздействие системы возбуждения камертонного гироскопа на его вторичные колебания слабо влияет на точность измерения угловой скорости.
- ◆ Разработана математическая модель гребенчатого двигателя системы возбуждения и получены расчетные соотношения для его оптимальных параметров.
- ◆ Получены соотношения для расчета основных характеристик одномассовых микромеханических гироскопов: масштабного коэффициента и его неустойчивости, смещения нуля, ширины полосы

пропускания, разрешающей способности. Сравнительный анализ характеристик гироскопов с поступательными (LL-гироскопа) и вращательными (RR-гироскоп) движениями чувствительных элементов показал, что для обеспечения одинаковой чувствительности необходимо, чтобы чувствительный элемент RR-гироскопа был по площади примерно в 4 раза больше, чем соответствующий чувствительный элемент LL-гироскопа.

- ◆ Обоснован выбор геометрических размеров инерционного элемента внутренней рамки карданового гироскопа, который позволяет обосновать возможность пренебрежения нелинейными составляющими в уравнениях движения чувствительного элемента.
- ◆ Разработана методика аналитического и численного расчета параметров чувствительного элемента исходя из требуемых характеристик прибора, на основе которой была создана программа автоматизированного проектирования одномассовых чувствительных элементов с дополнительной рамкой.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- [1] Крылов А.Н., Крутков Ю.А. Общая теория гироскопов. - Л.: Изд-во АН СССР, 1932. - 394 с.
- [2] Крылов А.Н. О земном магнетизме. - Собр. тр. акад. А.Н. Крылова. - Т.2. Земной магнетизм и компасное дело. - М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1947. - ч. 2. - С. 7-152.
- [3] Ишлинский А.Ю. Механика гироскопических систем. - М.: Изд-во АН СССР, 1963. - 482 с.
- [4] Ишлинский А.Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. - М.: Наука, 1976. - 672 с.
- [5] Ишлинский А.Ю. Механика относительного движения и силы инерции. - М.: Наука, 1981. - 191 с.
- [6] Булгаков Б.В. Прикладная теория гироскопов. - Изд. 3-е. - М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. - 400 с.
- [7] Кошляков В.Н. Теория гироскопических компасов. - М.: Наука, 1972. - 344 с.
- [8] Кошляков В.Н. Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов. Аналитические методы. - М.: Наука, 1985. - 288 с.
- [9] Пельпор Д.С. Гироскопические системы. - М.: Высш. шк., 1971. - Ч. 1. 568 с.
- [10] Пельпор Д.С., Матвеев В.А., Арсеньев В.Д. Динамически настраиваемые гироскопы (теория и конструкция).- М.: "Машиностроение", 1988.-304 с.
- [11] Климов Д.М., Харламов С.А. Гироскоп в кардановом подвесе. - М.: Наука, 1978. - 208 с.
- [12] Климов Д.М. Замечания по динамике карданового подвеса. - Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. - 1963. - № 4.- С. 7-9.

- [13] Журавлев В.Ф., Климов Д.М. О динамических эффектах в упругом вращающемся кольце. - Изв. АН СССР. МТТ. - 1983. - № 5, С. 17-23.
- [14] Одинцов А.А. Теория и расчет гироскопических приборов. - К.: Выща школа, 1985. - 392 с.
- [15] Одинцов А.А. Гироскопические интеграторы линейных ускорений. - К.: КПИ, 1968. - 88 с.
- [16] Одинцов А.А. Компенсационные гиротаксометры. - К.: КПИ, 1969. - 118 с.
- [17] Ривкин С.С. Теория гироскопических устройств: в 2 ч. - Л.: Судпромгиз, 1962. - 1056 с.
- [18] Ривкин С.С. Статистический синтез гироскопических устройств. - Л.: Судостроение, 1970. - 422 с.
- [19] Данилин В.П. Гироскопические приборы. - М.: Высшая школа, 1965. - 540 с.
- [20] Павловский М.А. Теория гироскопов. - К.: Вища школа, 1986. - 304 с.
- [21] Павловский М.А., Збруцкий А.В. Динамика роторных вибрационных гироскопов. - К.: Вища школа, 1984. - 192 с.
- [22] Павловский М.А. Влияние погрешностей изготовления и сборки гироприборов на их точность. - Изд-во Киев. ун-та, 1973. - 192 с.
- [23] Бойчук О.Ф., Збруцкий А.В., Павловский М.А. Уравнения движения многоколечных динамически настраиваемых гироскопов // Механика гироскопических систем. - 1985. - Вып. № 4. - С. 3-11.
- [24] Збруцкий А.В. Влияние поступательной вибрации на динамически настраиваемый гироскоп. - Изв. вузов. Приборостроение, 1980. - № 10. - С. 13-16.
- [25] Збруцкий А.В. К вопросу о динамической устойчивости гироскопических систем. - Докл. АН СССР, 1981. - № 3. - С. 43-47.
- [26] Брозгуль Л.И., Смирнов Е.Л. Вибрационные гироскопы. - М.:

- Машиностроение, 1970. - 216 с.
- [27] Брозгуль Л.И., Смирнов Е.Л. Вибрационные гироскопы. - В кн.: История механики гироскопических систем. М.: Наука, 1975. - С. 43-60.
- [28] Назаров Б.И. Гироскоп на ракете. - М.: Воениздат, 1964. - 104 с.
- [29] Апостолук В.А., Збруцкий А.В., Мареш В.Р. Физические основы построения сверхпроводящего измерителя угловых перемещений // Міжвідомчий науково-технічний збірник "Механіка гіроскопічних систем". - Київ: "Либідь". - 1997. - №14. - С. 10-15.
- [30] Ройтенберг Я.Н. Гироскопы. - М.: Наука, 1966. - 400 с.
- [31] Малеев П.И. Новые типы гироскопов. - Л.: Судостроение, 1971. - 160 с.
- [32] Дрейпер Ч.С., Ригли У. Интегрирующие поплавковые гироскопы. - В кн.: История механики гироскопических систем. - М.: Наука, 1975. - С.61-68.
- [33] Ригли У., Холлистер У., Денхард У. Теория, проектирование и испытания гироскопов. - М.: Мир, 1972. - 416 с.
- [34] Магнус К. Гироскоп: теория и применение. - М.: Мир, 1974. - 452 с.
- [35] Пат. 4598585 США. Planar inertial sensor / Voxenhorn B. (США); The Charles Stark Draper Laboratory, Inc., Cambridge; Заявл. 19.03.1984; Оpubл. 8.07.1986.
- [36] Voxenhorn B. A Vibratory Micromechanical Gyroscope // AIAA Guidance and Control Conference. - Minneapolis, MN. - 1988. - P. 1033.
- [37] Barbour N., Elwell I., Setterlund R., Schmidt G. Inertial instruments: where to now? // 1 St. Petersburg international conference on gyroscopic technology. - St. Petersburg. - 1994. - P. 13-24.
- [38] Barbour N., Connely I., Gilmore I., Greiff P., Kourepenis A., Weinberg M. Micro-electromechanical instrument and systems development at Draper Laboratory // 3-rd St. Petersburg international conference on

- gyroscopic technology and navigation. - St. Petersburg. - 1996. - P. 3-10.
- [39] Greiff P., Boxenhorn B., King T., Niles L. Silicon Monolithic Gyroscope // Transducers '91, Digest of Technical Papers. - International Conference on Solid State Sensors and Actuators. - 1991. - P. 966-969.
- [40] Збруцкий А.В., Кисиленко С.П., Коржевин Д.А. Собственные колебания микромеханического вибрационного гироскопа // Респ. междувед. Научно-техн. Сб. "Механика гироскопических систем". - Киев. - 1993. - Вып. 12. - С. 86-92.
- [41] Збруцкий А.В., Кисиленко С.П., Шахов С.А. Частотные характеристики динамически симметричного микромеханического вибрационного гироскопа // Респ. междувед. научно-техн. сб. "Механика гироскопических систем". - Киев. - 1993. - Вып. 12. - С. 93-99.
- [42] Doronin V.P., Kharlamov S.A., Khromov B.V., Neapolitansky A.S., Novikov L.Z., Zhbanov Yu.K. Operation principle and basic errors of vibratory gyroscopes as rotation angle measuring device // 4-th St. Petersburg international conference on integrated navigation systems. - St. Petersburg. - 1997. - P. 337-346.
- [43] Пат. 5349855 США. Comb drive micromechanical tuning fork gyro / Bernstein I., Weinberg M. (США); The Charles Stark Draper Laboratory, Inc., Cambridge; Заявл. 07.04.1992; Опубл. 27.09.1994.
- [44] Bernstein J., Cho S., King A.T., Kourepenis A., Maciel P., Weinberg M. A Micromachined Comb-Drive Tuning Fork Rate Gyroscope // MEMS'93 .- 1993. - P. 143-148.
- [45] Weinberg M., Bernstein I., Cho S., King A., Kourepenis A., Ward P., Sohn I. A Micromachined comb drive tuning fork gyroscope for commercial applications // 2-nd St. Petersburg international conference on gyroscopic technology and navigation. - St. Petersburg. - 1995. - P. 79-87.
- [46] Barbour N., Madden P., Scha M. Development of a micromechanical gyro

- package with GPS for small raining sattelites // Гироскопия и навигация. - Санкт-Петербург. - 1996. - № 2(13). - С. 7-15. (Русский перевод там же. С. 16-25).
- [47] Söderkvist J. A Mathematical Analysis of Flexural Vibrations of Piezoelectric Beams With Applications to Angular Rate Sensors: Ph.D. Thesis. - Uppsala University, Sweden. - 1990.
- [48] Spangler L., Wise K.D. A New Silicon-on-Glass Process for Integrated Sensors // IEEE Sensors and Actuator Workshop Tech. Digest. - Hilton Head, S.C. - 1988. - P. 140-142.
- [49] Gianchandani Y., Najafi K. A Bulk Silicon Dissolved Wafer Process for Microelectromechanical Systems // Technical Digest, International Devices Meeting (IEDM). - Wasington, DC. - 1991. - P. 757-760.
- [50] Marselli C., Amann H.P., Pellandini F., Gretillat F., Gretillat M.-A., N.F. de Rooij. Error Modelling of a Silicon Angular Rate Sensor. // Symposium Gyro Technology 1997. - Germany, Stuttgart. - 1997. - P. 4.0-4.9.
- [51] Geiger W., Folkmer B., Sandmaier H., Lang W. Improved Rate Gyroscope Designs Designated for Fabrication by Modern Deep Silicon Etching // Symposium Gyro Technology 1997. - Germany, Stuttgart. - 1997. - P. 2.0-2.8.
- [52] Thor Juneau, Pisano A.P., James H. Smith. Dual Axis Operation of a Micromachined Rate Gyroscope // Transducers'97. - 1997. - Vol. 2. - P. 883-886.
- [53] William A. Clark, Roger T. Howe, Roberto Horowitz. Micromachined Z-Axis Vibratory Rate Gyroscope // Technical Digest of the Solid-State Sensor and Actuator Workshop. - Hillon Head, South Carolina. - 1996. - P. 283-287.
- [54] Fedder G.K., Santhanam S., Reed M.L., Eagle S.C., Guillou D.F., Lu M.S., Carley L.R. Laminated high-aspect-ratio structures in a conventional CMOS process // Sensors and Actuators .- V. A57. - no. 2. - P. 103-110.

- [55] William C. Tang, Tu-Cuong H. Nguyen, Michael W. Judy, Roger T. Howe. Electrostatic Comb Drive of Lateral Polysilicon Resonators // Sensors and Actuators, A21-A23. - 1990. - P. 328-331.
- [56] Kranz M.S., Fedder G.K. Micromechanical Rate Gyroscopes Fabricated in Conventional CMOS // Symposium Gyro Technology 1997. - Germany, Stuttgart. - 1997. - P. 3.0-3.8.
- [57] Lynch D.D. Vibratory Gyro Analysis by the Method of Averaging // 2-nd St. Petersburg international conference on gyroscopic technology and navigation. - St. Petersburg. - 1995. - P. 26-34.
- [58] Sang-Hun Lee, Hyung-Taek Lim, Seong-Hyok Kim, Yomg-Kweon Kim. Design of a Planar Vibratory Gyroscope Using Electrostatic Actuation and Electromagnetic Detection // Symposium Gyro Technology 1997. - Germany, Stuttgart. - 1997. - P. 10.0-10.11.
- [59] Григорян Э.А., Неаполитанский А.С., Харламов С.А., Шахов Д.С. Исследование влияния термоупругих напряжений элементов конструкции на точностные характеристики микромеханического вибрационного гироскопа // V Санкт-Петербургская международная по интегрированным навигационным системам.- Санкт-Петербург. - Май 1998. - С. 155-158.
- [60] Глыбин И.Г., Неаполитанский А. С., Турлыков В.Р., Харламов С.А., Хромов Б.В. Анализ и регулирование влияния сопротивления электрического контура на демпфирование микромеханических вибрационных гироскопов и акселерометров // V Санкт-Петербургская международная по интегрированным навигационным .- Санкт-Петербург. - Май 1998. - С. 159-162.
- [61] Збруцкий А.В., Апостолок В.А. Микромеханический вибрационный гироскоп // Тезисы докладов международной научно-технической конференции “Современные научно-технические проблемы гражданской авиации”. - Москва: МГТУ ГА. - 1996. - С. 116-117.

- [62] Apostolyuk V. A., Zbrutsky A. V. Investigation of micromechanical inertial devices // 4-th St. Petersburg international conference on integrated navigation systems. - St. Petersburg. - 1997. - P. 330-336.
- [63] Збруцький О.В., Апостолук В.О. Мікромеханічний вимірювач кінематичних параметрів // Тези доповідей 1-ої національної науково-технічної конференції “Гіротехнології, навігація та управління рухом”. - Київ: НТУУ “КПІ”. - 1997. - С. 39-40.
- [64] Апостолук В.О., Збруцький О.В. Мікромеханічний вібраційний гіроскоп // Тези доповідей 2-ої міжнародної науково-технічної конференції “Гіротехнології, навігація та управління рухом”. - Київ: НТУУ “КПІ”. - 1997. - С. 11-12.
- [65] Збруцкий А.В., Апостолук В.А. Микромеханические гироскопы и их использование в системах управления // Сборник трудов международной научно-технической конференции “Приборостроение-98”. - Ученые записки Симферопольского государственного университета. - Симферополь. - 1998. - С. 289-292.
- [66] Апостолук В.А., Збруцкий А.В. Динамика одномассовых микромеханических гироскопов // Сборник докладов юбилейной научно-технической конференции “Приборы и системы ориентации, стабилизации и навигации”. - Москва: МГТУ им. Н.Э. Баумана. - 1998. - С. 52-65.
- [67] Збруцкий А.В., Апостолук В.А. Динамика чувствительного элемента микромеханического гироскопа с дополнительной рамкой // “Гироскопия и навигация”. - Санкт-Петербург: ЦНИИ “Электроприбор”. - 1998. - №3(22). - С. 13-23.
- [68] Збруцький В.О., Апостолук В.О. Дослідження динаміки карданового мікромеханічного гіроскопа // “Наукові вісті Національного технічного університету України “КПІ””. - Київ: НТУУ “КПІ”. - 1998. - № 3. - С.115-121.

- [69] Павловский М.А., Путята Т.В. Теоретическая механика. - К.: Выща школа, 1985. - 328 с.
- [70] Павловский М.А., Акинфиева Л.Ю., Бойчук О.Ф. Теоретическая механика. Статика. Кинематика. - К.: Выща школа, 1989. - 351 с.
- [71] Павловский М.А., Акинфиева Л.Ю., Бойчук О.Ф. Теоретическая механика. Динамика. - К.: Выща школа, 1990. - 480 с.
- [72] Найфе А. Введение в методы возмущений. - М.: Мир, 1984. - 535 с.
- [73] Стрелков С.П. Введение в теорию колебаний. - М.: Наука, 1964. - 440 с.
- [74] Ганиев Р.Ф., Кононенко В.О. Колебания твердых тел. - М.: Наука, 1976. - 432 с.
- [75] Потемкин В.Г. Система MATLAB: справочное пособие. - М.: Диалог-МИФИ, 1997. - 350 с.
- [76] Wolfram S. Mathematica: A System for Doing Mathematica by Computer. - Addison-Wesley, 1992. - 432 p.
- [77] Gaylord R.J., Wellin P.R. Computer Simulations with Mathematica. Explorations in Complex Physical and Biological Systems. - New York: Springer-Verlag, 1995. - 297 p.
- [78] Bahder T.B. Mathematica for Scientists and Engineers. - Addison-Wesley, 1995. - 846 p.
- [79] Zimmerman R.L., Olness F.I. Mathematica for Physics. - Addison-Wesley, 1995. - 436 p.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение А

Численное моделирование на языке MATLAB

Необходимым элементом анализа механических систем является их численное моделирование. Многие важные для разработки задачи могут быть успешно решены только при помощи численного моделирования. Численные методы решения систем дифференциальных уравнений позволяют проводить исследование динамических систем на уровне их нелинейных моделей. Следовательно, для полноты и качества анализа динамики и погрешностей микромеханических вибрационных гироскопов является очевидной необходимостью проведения их численного моделирования. Воспользуемся для этого языком MATLAB, как одним из наиболее популярных и широко распространенных средств проведения численного моделирования различных систем.

А.1. Схемы моделирования движения чувствительного элемента

Для составления программы численного моделирования динамики как чувствительного элемента микромеханического вибрационного гироскопа с промежуточной рамкой, так и всего прибора на подвижном основании, воспользуемся удобным редактором структурных схем SIMULINK (Версия 2.0), который входит в состав языка MATLAB (Версия 5.1). На верхнем уровне схема чувствительного элемента микромеханического вибрационного гироскопа имеет вид, представленный на рис. А.1. Рассматривается система имеющая ряд входов и выходов. Входом системы являются компоненты вектора переносной угловой скорости и силы, действующие в направлении выбранных обобщенных координат. Выходом будут значения обобщенных координат. В случае гармонического

возбуждения на вход q_2 подается гармонический сигнал. Преобразование входных сигналов в выходные осуществляется блоком, моделирующим динамику чувствительного элемента.

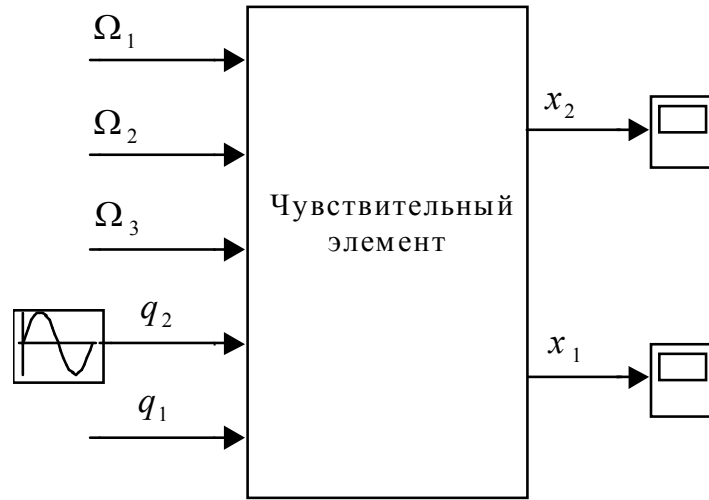


Рис. А.1. Общая схема численного моделирования

Рассмотрим математическую модель, которая описывает поведение чувствительного элемента на вращающемся с произвольной переносной угловой скоростью $\bar{\Omega} = \{\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3\}$ основании. Движение чувствительного элемента в этом случае описывается системой дифференциальных уравнений (3.7), которая имеет вид:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2h_1\dot{x}_1 + (k_1^2 - \Omega_2^2 - \Omega_3^2)x_1 - 2\Omega_3\dot{x}_2 + (\Omega_1\Omega_2 - \dot{\Omega}_3)x_2 = q_1, \\ \ddot{x}_2 + 2h_2\dot{x}_2 + (k_2^2 - \Omega_1^2 - \Omega_3^2)x_2 + 2d\Omega_3\dot{x}_1 + d(\Omega_1\Omega_2 + \dot{\Omega}_3)x_1 = q_2, \end{cases}$$

Принципиально, чувствительный элемент микромеханического вибрационного гироскопа состоит из двух осцилляторов, связанных между собой перекрестными связями, которые зависят от измеряемой переносной угловой скорости как линейно, так и нелинейно. Поэтому систему (3.7) можно привести к виду

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2h_1\dot{x}_1 + (k_1^2 - \Omega_2^2 - \Omega_3^2)x_1 = q_1 + 2\Omega_3\dot{x}_2 - (\Omega_1\Omega_2 - \dot{\Omega}_3)x_2, \\ \ddot{x}_2 + 2h_2\dot{x}_2 + (k_2^2 - \Omega_1^2 - \Omega_3^2)x_2 = q_2 - 2d\Omega_3\dot{x}_1 - d(\Omega_1\Omega_2 + \dot{\Omega}_3)x_1. \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

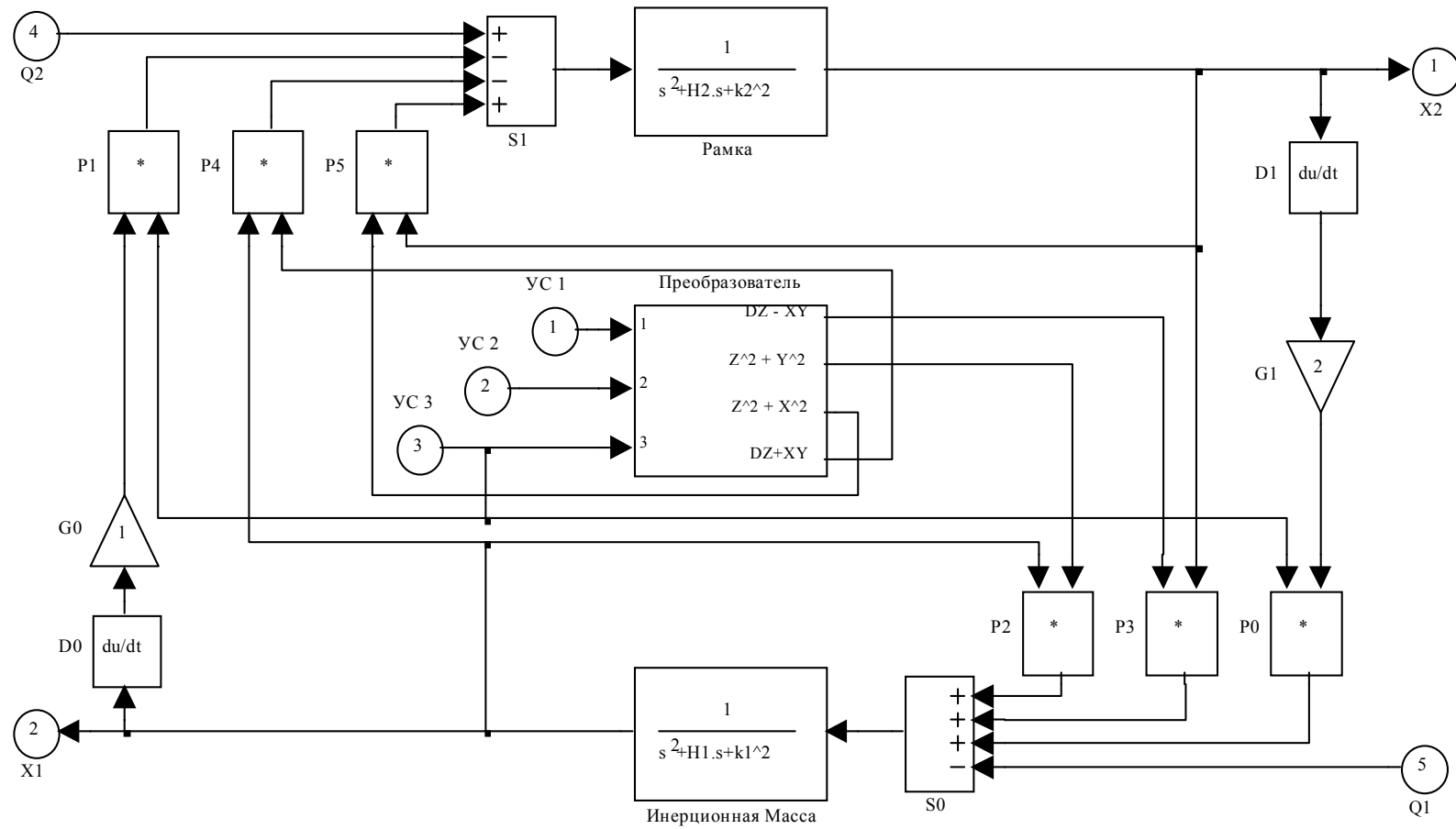


Рис. А.2. Динамическая схема чувствительного элемента

Схема, составленная редактором SIMULINK, и которая моделирует преобразование входных величин в выходные в соответствии с системой уравнений (А.1), представлена на рис. А.2. Рассматриваемая схема моделирования предусматривает наличие нелинейных по отношению к измеряемой угловой скорости членов уравнений. Формирование этих составляющих происходит в блоке “Преобразователь”. Устройство этого блока изображено на рис. А.3.

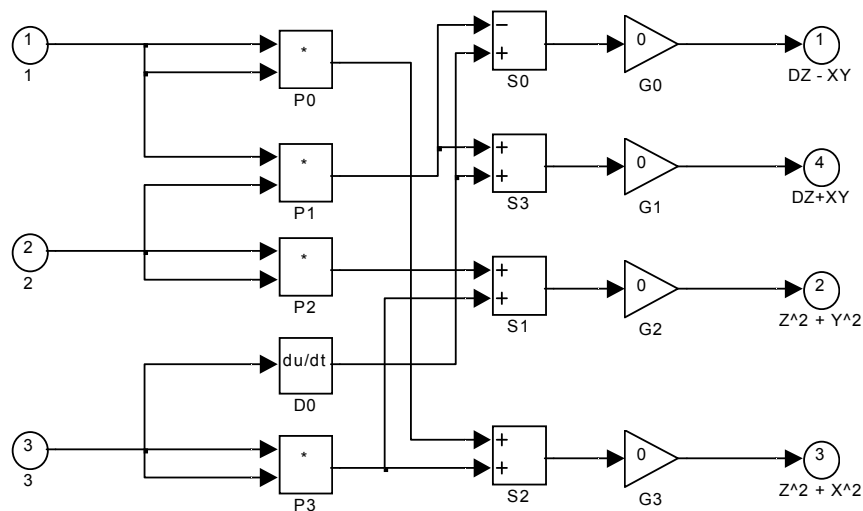


Рис. А.3. Схема нелинейного преобразователя

На вход преобразователя подаются компоненты вектора переносной угловой скорости, а на выходе получают сигналы, пропорциональные квадратам этих компонент, а также пропорциональные выражениям $(\Omega_1 \Omega_2 \pm \Omega_3)$. В дальнейшем происходит перемножение этих составляющих с переменными x_1 и x_2 для формирования соответствующих перекрестных связей. В случае, когда необходимо рассмотреть движение чувствительного элемента, зависящее только от некоторых из заданных нелинейностей, соответствующие элементы схемы могут быть исключены посредством установки выходного коэффициента усиления по этому

каналу в ноль. Динамика линейных осцилляторов описывается блоками передаточных функций, которые на схеме обозначены “Рамка” и “Инерционная масса”. Остальные блоки на схеме соответствуют операциям сложения, умножения на константу, перемножения и дифференцирования сигналов. Составленная схема численного моделирования позволяет исследовать движение чувствительного элемента микромеханического вибрационного гироскопа с промежуточной рамкой на произвольно вращающемся основании. Результаты проведенного численного моделирования движения чувствительного элемента и работы прибора в целом приводятся непосредственно в главах, в которых рассматривается соответствующий им случай движения.

Приложение Б

Смещение парциальных частот

Как было показано ранее, собственные частоты чувствительного элемента являются функциями переносной угловой скорости. Это приводит к нестационарному изменению собственных частот, которое вызывает появление мультипликативной погрешности в измерении угловой скорости. Кроме этого, причиной изменения собственных частот могут быть как изменения температуры, так и другие факторы. Исследуем погрешность, вызванную изменением собственных частот чувствительного элемента, которое в основном связано с изменениями парциальных частот.

Представим парциальные частоты чувствительного элемента в виде

$$k_1 = k_{10} + \Delta k_1, \quad k_2 = k_{20} + \Delta k_2, \quad (\text{Б.1})$$

где k_{10} и k_{20} - невозмущенные значения парциальных частот; Δk_1 и Δk_2 - некоторые малые добавки. Представим подкоренное выражение в знаменателе формулы (3.20) для амплитуды выходных колебаний инерционной массы в направлении координаты x_1 для невозмущенных парциальных в виде

$$\Delta_0^2 = \left[s_1 s_2 - 4\omega^2 (h_1 h_2 + d\Omega^2) \right]^2 + 4\omega^2 [h_1 s_2 + h_2 s_1]^2, \quad (\text{Б.2})$$

$$s_j = k_{j0}^2 - \Omega^2 - \omega^2, \quad j = 1, 2.$$

В случае малого смещения парциальных частот подкоренное выражение в знаменателе формулы (3.20) для A_1 записывается следующим образом:

$$\Delta^2 \approx \Delta_0^2 + \delta(\Delta k_1, \Delta k_2),$$

где Δ_0^2 определяется выражением (Б.2), а возмущение δ имеет вид

$$\delta(\Delta k_1, \Delta k_2) = 4k_{10} \left[s_2 [s_1 s_2 - 4\omega^2 (h_1 h_2 + d\Omega^2)] + 4h_2 \omega^2 (s_1 h_2 + s_2 h_1) \right] \Delta k_1 + \quad (\text{Б.3})$$

$$+ 4k_{20} \left[s_1 [s_1 s_2 - 4\omega^2 (h_1 h_2 + d\Omega^2)] + 4h_1 \omega^2 (s_1 h_2 + s_2 h_1) \right] \Delta k_2.$$

С учетом (Б.3) и при помощи разложения

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1 - \frac{x}{2}$$

амплитуду выходных колебаний A_1 по координате x_1 представим в виде

$$A_1 \approx A_{10} + \Delta A_1,$$

где A_{10} - амплитуда колебаний инерционной массы при отсутствии смещения парциальных частот, а абсолютная погрешность ΔA_1 определяется по формуле

$$\Delta A_1 = -\frac{A_{10} \delta(\Delta k_1, \Delta k_2)}{2\Delta_0^2}. \quad (\text{Б.4})$$

Из формулы (Б.4) получается следующее выражение для относительной погрешности:

$$\delta A_1 = \frac{\Delta A_1}{A_{10}} = -\frac{\delta(\Delta k_1, \Delta k_2)}{2\Delta_0^2}. \quad (\text{Б.5})$$

Если принять, что относительные смещения одинаковы для обеих парциальных частот и равны

$$\delta k = \frac{\Delta k_1}{k_{10}} = \frac{\Delta k_2}{k_{20}},$$

то выражение для относительной погрешности амплитуды выходных колебаний инерционной массы будет иметь вид

$$\begin{aligned} \delta A_1 = \frac{2\delta k}{\Delta_0^2} \left\{ k_{10}^2 \left[s_2 \left[s_1 s_2 - 4\omega^2 (h_1 h_2 + d\Omega^2) \right] + 4h_2 \omega^2 (s_1 h_2 + s_2 h_1) \right] + \right. \\ \left. + k_{20}^2 \left[s_1 \left[s_1 s_2 - 4\omega^2 (h_1 h_2 + d\Omega^2) \right] + 4h_1 \omega^2 (s_1 h_2 + s_2 h_1) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{Б.6})$$

Качественный график зависимости величины относительной погрешности δA_1 от частоты возбуждения ω для различных значений δk представлен на рис. Б.1. Величина относительной погрешности δA_1 , вызванной смещением парциальных частот, слабо зависит от переносной угловой скорости, которая находится в диапазоне устойчивых колебаний чувствительного элемента ($\Omega \ll k_i$). Кроме этого, анализ графика на рис. Б.1 показывает, что для некоторых значений частоты возбуждения уровень относительной

погрешности равен нулю. Найдем эти частоты. Они будут решениями уравнения

$$\delta A_1 = 0, \quad (\text{Б.7})$$

которое является бикубическим уравнением относительно частоты возбуждения ω . Нахождение аналитических решений такого уравнения затруднительно, но оно может быть решено численно.

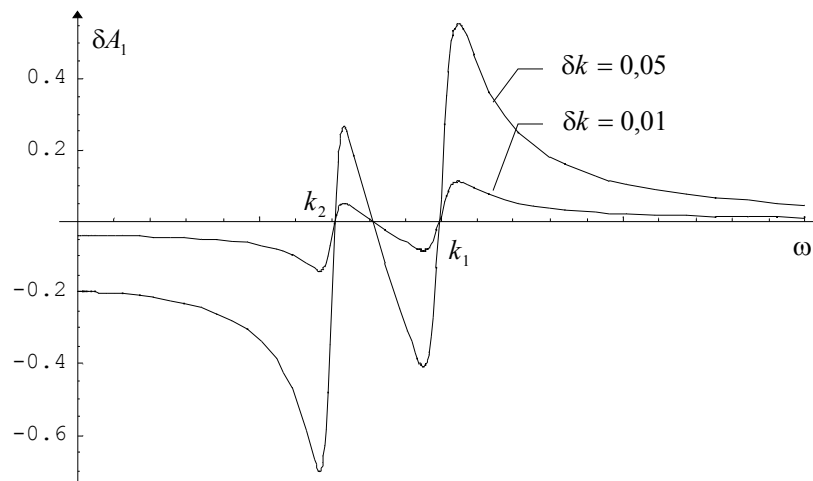


Рис. Б.1. Зависимость относительной погрешности δA от частоты возбуждения для различных значений относительного смещения парциальных частот

Если пренебречь переносной угловой скоростью и демпфированием, то уравнение (Б.7) будет

$$(k_1^2 + k_2^2)\omega^6 - (k_1^4 + 4k_1^2k_2^2 + k_2^4)\omega^4 + 3(k_1^4k_2^2 + k_1^2k_2^4)\omega^2 - 2k_1^4k_2^4 = 0. \quad (\text{Б.8})$$

Корни приближенного уравнения (Б.8) определяются по формулам:

$$\omega_{1,2} = \pm k_1, \quad \omega_{3,4} = \pm k_2, \quad \omega_{5,6} = \pm k_1 k_2 \sqrt{\frac{2}{k_1^2 + k_2^2}}. \quad (\text{Б.9})$$

Здесь $k_j = k_{j0}$. Таким образом, выбирая частоту возбуждения равную какой-либо из парциальных частот мы можем добиться значительного уменьшения влияния смещения парциальных частот на точность измерения угловой скорости.

Приложение В

Расчет параметров конструкции чувствительного элемента

Расчитанные значения парциальных частот первичных и вторичных колебаний могут быть использованы для определения размеров элементов конструкции чувствительного элемента. Коэффициенты жесткости упругого подвеса в направлении первичных и вторичных колебаний рассчитываются по формулам

$$c_1 = \frac{4Ehb_1^3}{l_1^3}, \quad c_2 = \frac{4Ehb_2^3}{l_2^3}, \quad (\text{B.1})$$

где E - модуль Юнга первого рода для материала чувствительного элемента, h - толщина пластины чувствительного элемента, l_1 и l_2 - длины соответствующих упругих элементов (прямоугольного сечения), а b_1 и b_2 - их ширины. Парциальные частоты будут рассчитываться по формулам

$$k = 2\sqrt{\frac{Eb_2^3}{l_2^3\rho}} \left[4l_1b_1 + n_0b_3(l_1 - 2a_2 - g_y) + 4p_1(a_1 + p_2) + 2p_2X_1 + 2p_1Y_1 + X_1Y_1 \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (\text{B.2})$$

$$\delta k = \sqrt{\frac{l_2^3b_1^3}{l_1^3b_2^3}} \left[4l_1b_1 + n_0b_3(l_1 - 2a_2 - g_y) + 4p_1(a_1 + p_2) + 2p_2X_1 + 2p_1Y_1 + X_1Y_1 \right]^{\frac{1}{2}} \left[n_0(l_1 - 2a_2 - g_y) + X_1Y_1 \right],$$

где ρ - плотность материала, n_0 - число пар обкладок конденсаторов системы съема, X_1 и Y_1 - размеры инерционной массы, b_3 - ширина обкладки конденсатора системы съема, p_1 и p_2 - ширины рамки, a_1 и a_2 - максимальный допустимый свободный ход чувствительного элемента в направлении осей вторичных и первичных колебаний соответственно, g_y - ширина основания обкладок системы съема, расположенных на основании. Все перечисленные параметры чувствительного элемента могут быть заданы заранее (исходя из технологических возможностей), за исключением длин упругих элементов l_1 и l_2 , которые находятся из

уравнений (В.2) при заданных требуемых значениях для парциальных частот. Длина электрода системы съема l_3 находится по формуле

$$l_3 = l_1 - 2a_2 - g_y. \quad (\text{В.3})$$

Количество электродов определяется из выражения

$$n_0 = \frac{X_1 + b_4 - 2(b_1 + a_1)}{3b_3 + b_4 + 2a_1}. \quad (\text{В.4})$$

Оно определяется для заданного минимально возможного значения b_{40} , далее отбрасывается дробная часть и из полученного значения n_0 находится значение параметра b_4 , которое является расстоянием между соседними парами обкладок системы съема на корпусе прибора. Рассчитанные параметры конструкции чувствительного элемента полностью определяют его внешний вид, изображенный на рис. В.1.

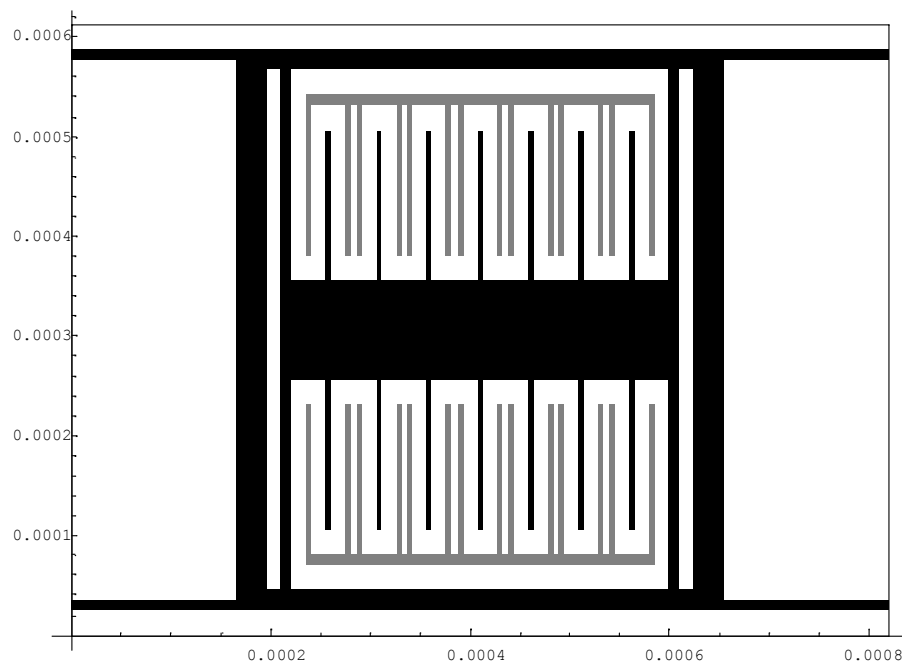


Рис. В.1. Чувствительный элемент гироскопа

Габаритные размеры чувствительного элемента L_x и L_y будут определяться соотношениями

$$L_x = 2l_2 + 2a_1 + X_1 + 2p_1, \quad L_y = 2a_2 + 2l_1 + Y_1 + 2p_2. \quad (\text{В.5})$$

При численных расчетах чувствительного элемента, приведенного на рис. 1, принималось, что $k = 8000 \Gamma \mu$, а $\delta k = 1,05$. Существенным параметром чувствительного элемента является рабочая площадь перекрытия электродов системы съема, которая определяется выражением

$$S = 2n_0(l_3 - a_2)h. \quad (\text{В.6})$$

Рассчитанные значения эффективной площади используются далее для проектирования сервисной электроники прибора.

Приложение Д